

# 1. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

## 1.1. Статически неопределимые стержневые системы

Статически неопределимыми системами называются системы, для которых, пользуясь только условиями статики, нельзя определить усилия во всех стержнях. Для расчета статически неопределимых систем применяются условия статики и условия совместности перемещений, причем решение ведут в следующем порядке. Для рассматриваемой системы вначале записывают уравнения статики и устанавливают степень статической неопределимости системы; затем составляют условия совместности перемещений, то есть геометрические зависимости между удлинениями отдельных элементов системы. Удлинения элементов системы выражают через усилия по закону Гука и подставляют в условия совместности перемещений. Решая составленные уравнения статики и уравнения совместности перемещений, находят продольные усилия во всех элементах системы.

Для определения температурных напряжений указанная схема расчета сохраняется. В этом случае условия статики составляют только для усилий, а величины изменений длин нагретых или охлажденных элементов определяют алгебраическим суммированием приращений длин от усилий и изменения температуры. Абсолютное удлинение от изменения температуры подсчитывают по следующей формуле:

$$\Delta l = l\alpha\Delta t, \quad (1.1)$$

где  $l$  – длина стержня,  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения материала,  $\Delta t$  – изменение температуры.

Определение монтажных напряжений производят также из условий статики и условий совместности перемещений. В этом случае при составлении условий совместности перемещений учитывают наличие заданной неточности в длинах элементов системы. Поскольку фактически длины элементов, полученные при изготовлении, мало отличаются от

предусмотренных в проекте, то при определении абсолютных удлинений элементов по закону Гука берут их проектные длины, а не фактические.

### Задание 1.2. Расчет статически неопределимой стержневой системы с учетом изменения температуры

Абсолютно жесткий брус, нагруженный заданной нагрузкой, поддерживается шарнирно-неподвижной опорой  $A$  и двумя деформируемыми стальными стержнями 1 и 2. Температура стержня в период эксплуатации может повышаться на величину  $\Delta t$  °C. Кроме того, стержень 2 изготовлен на величину  $\Delta$  длиннее проектного размера. Неточность изготовления  $\Delta$  устраняется сжатием стержня при монтаже.

Определить усилия в стержнях 1 и 2 в период эксплуатации. При расчете принять  $E = 210$  ГПа,  $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$  град<sup>-1</sup>. Расчетные схемы представлены на рисунках 1.1 – 1.10.

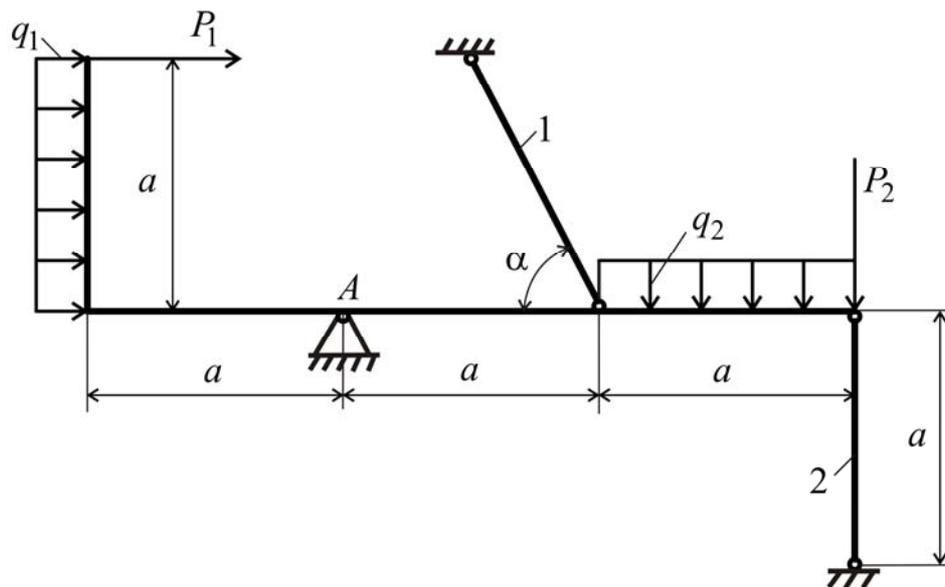


Рисунок 1.1

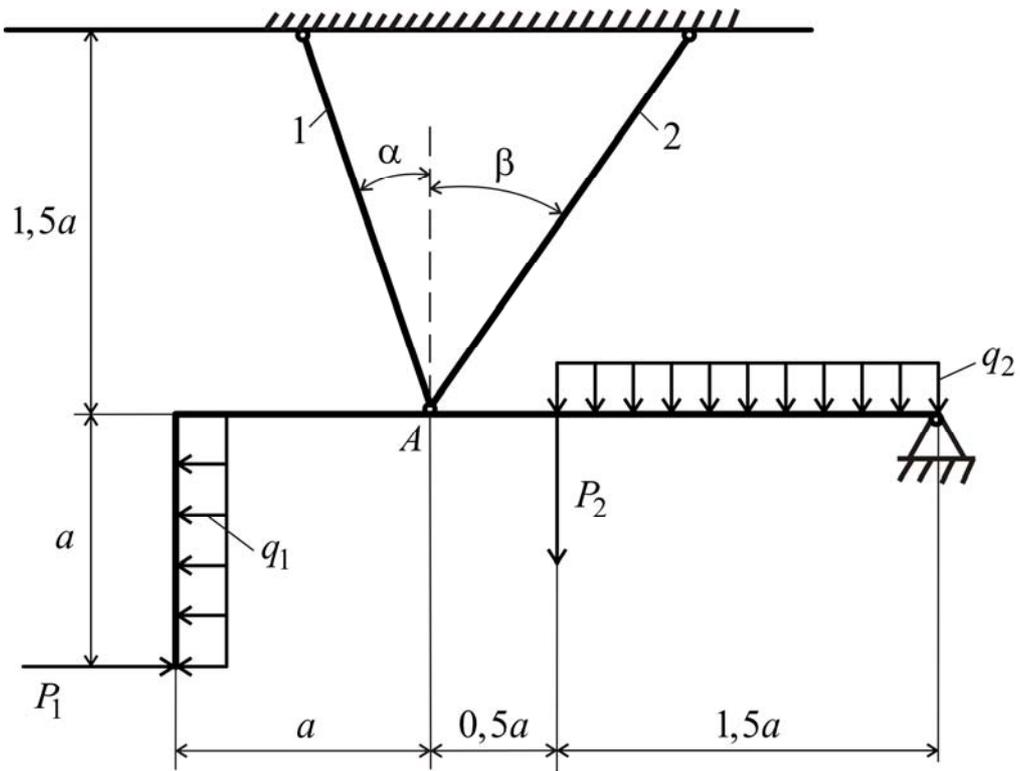


Рисунок 1.2

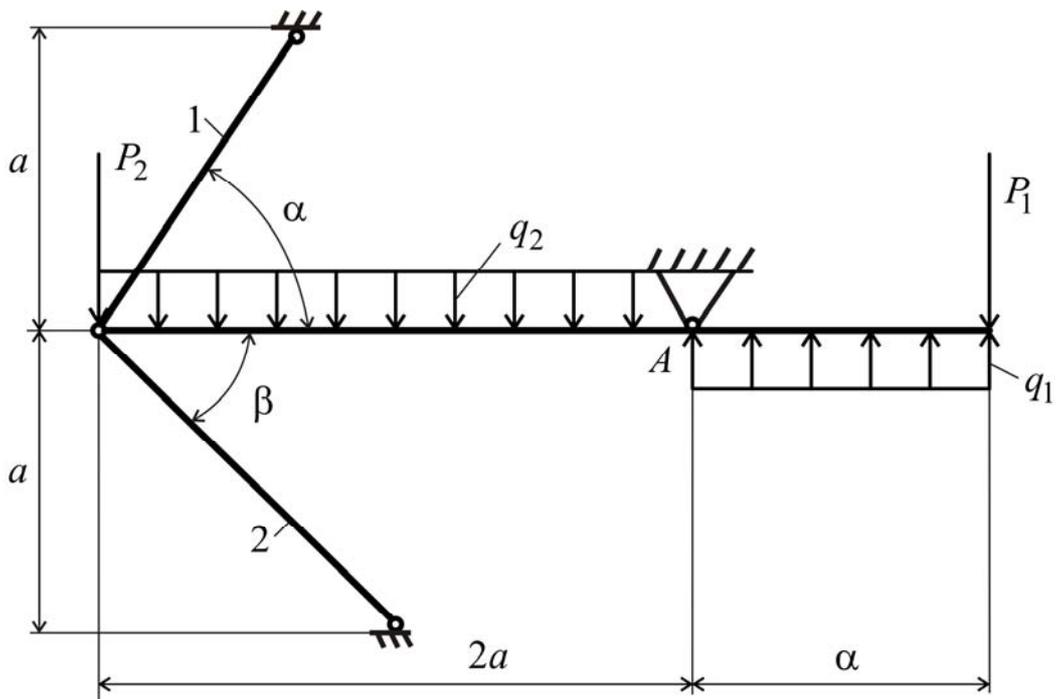


Рисунок 1.3

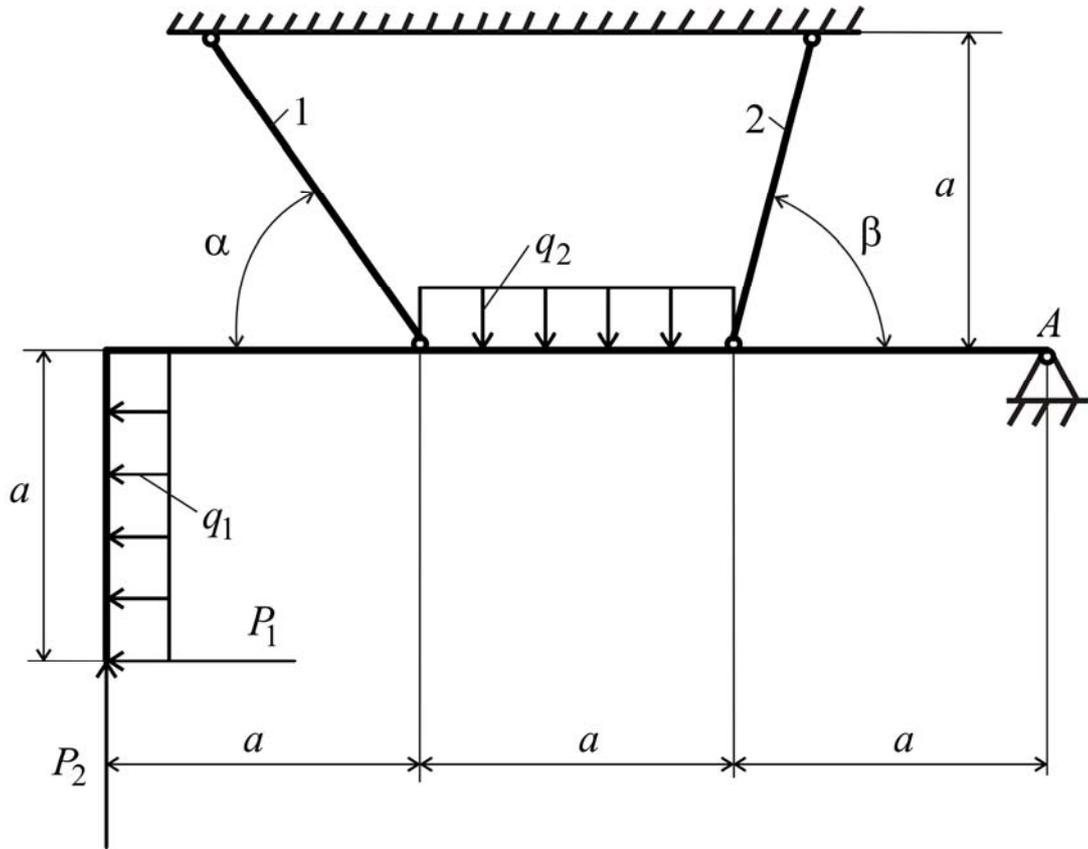


Рисунок 1.4

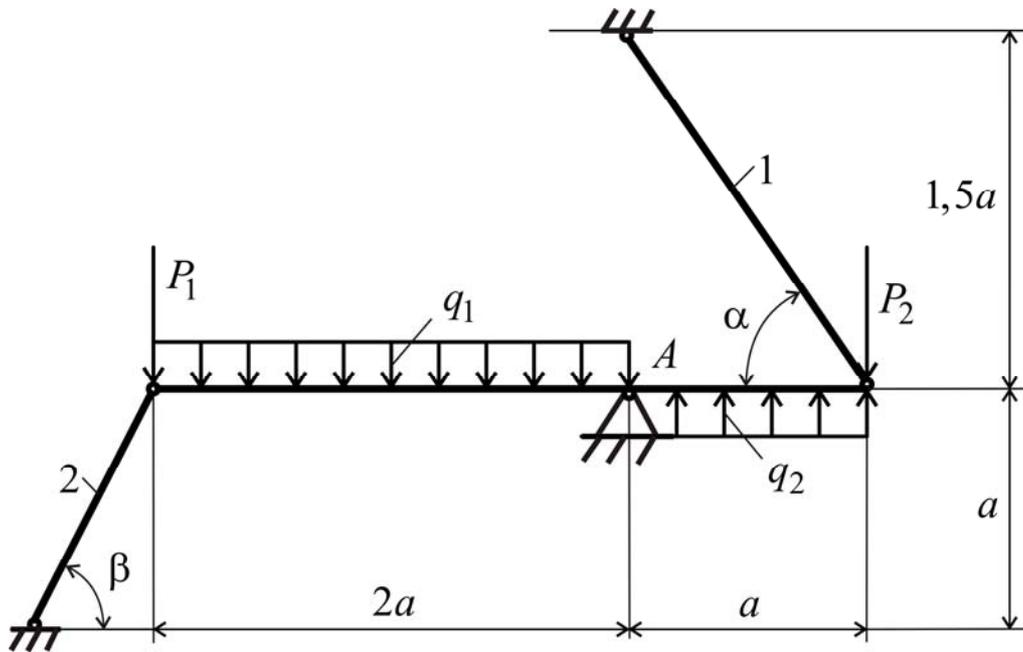


Рисунок 1.5

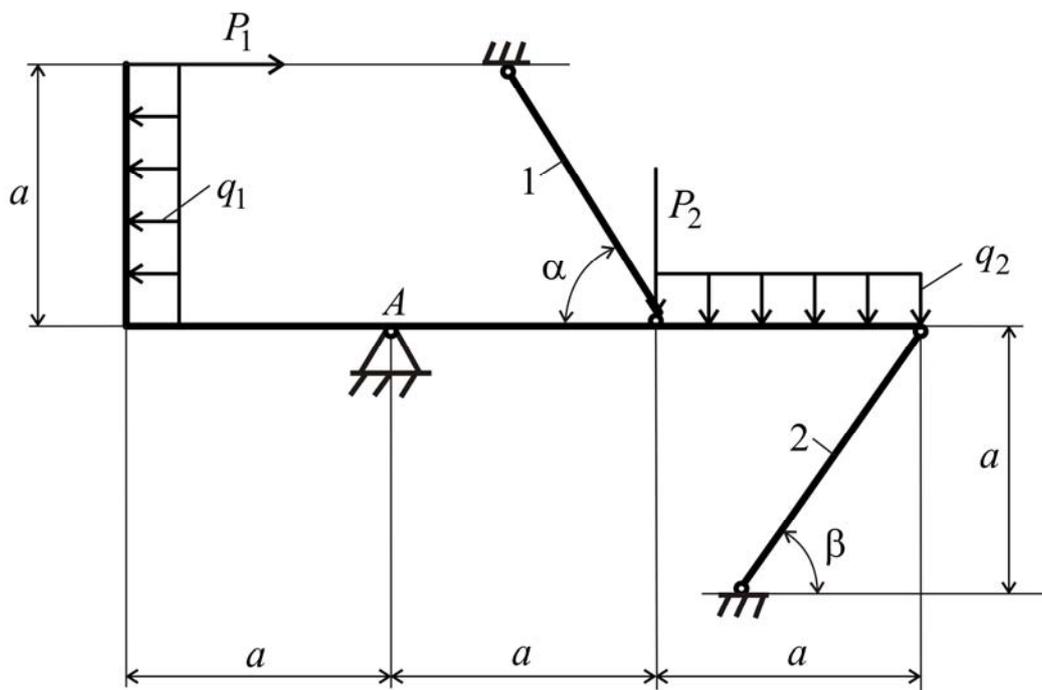


Рисунок 1.6

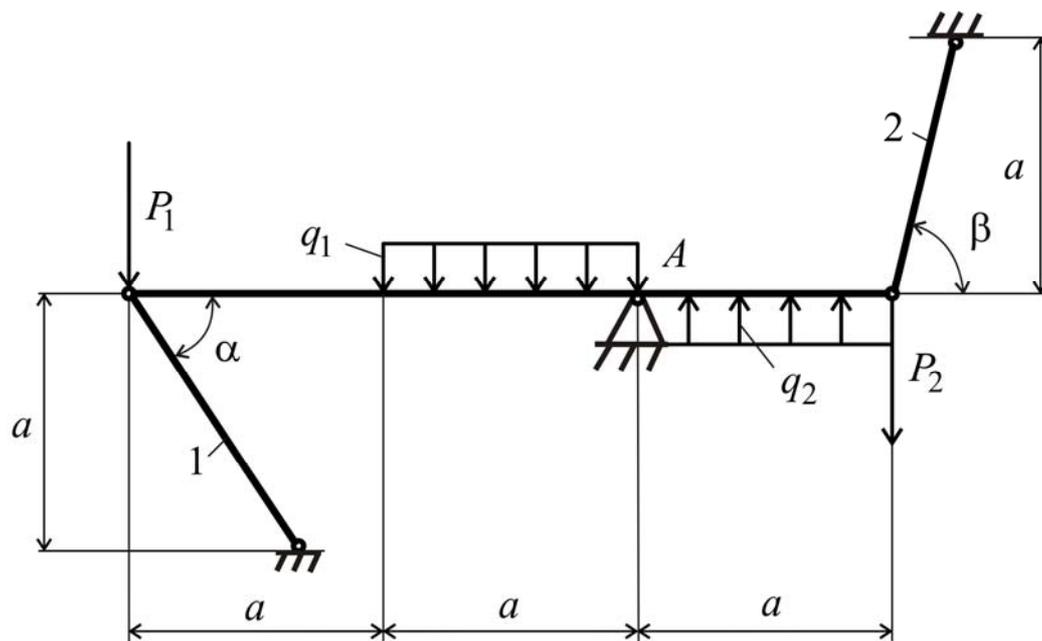


Рисунок 1.7

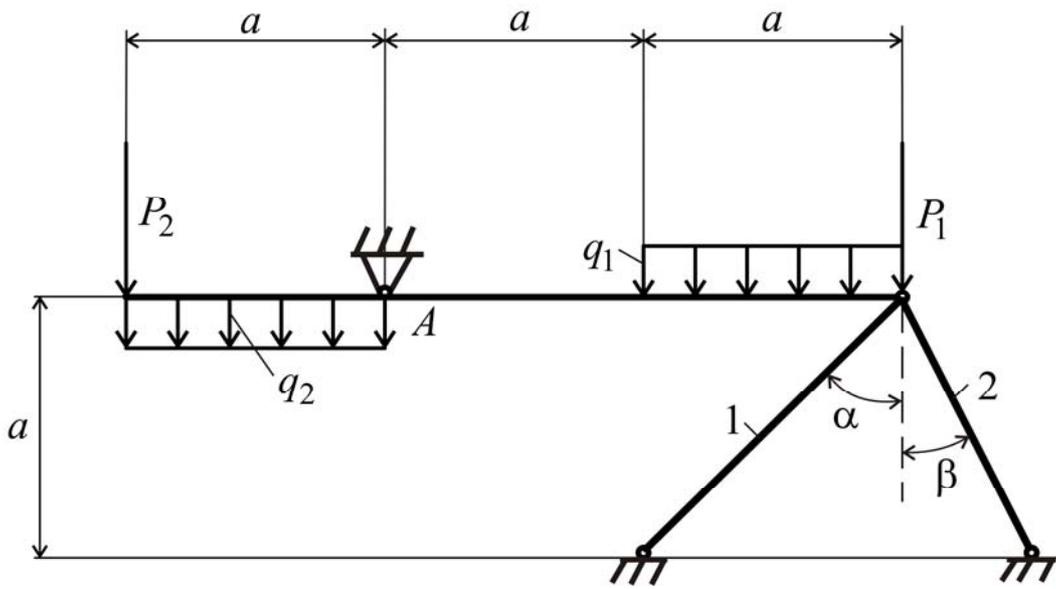


Рисунок 1.8

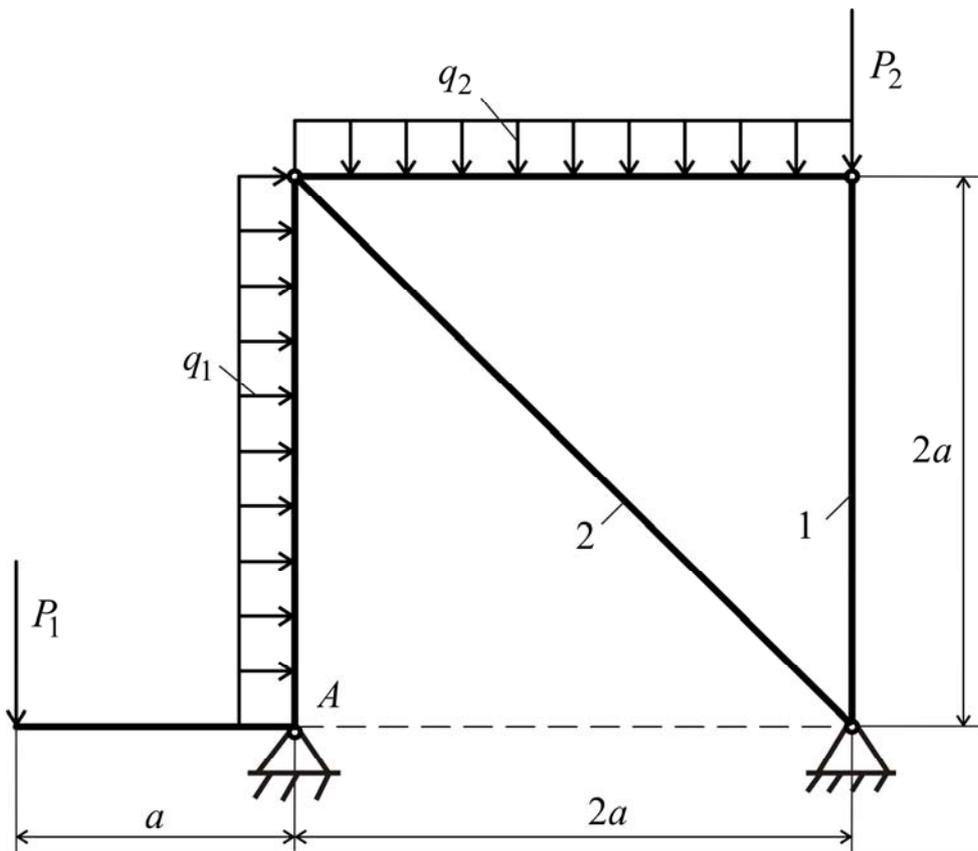


Рисунок 1.9

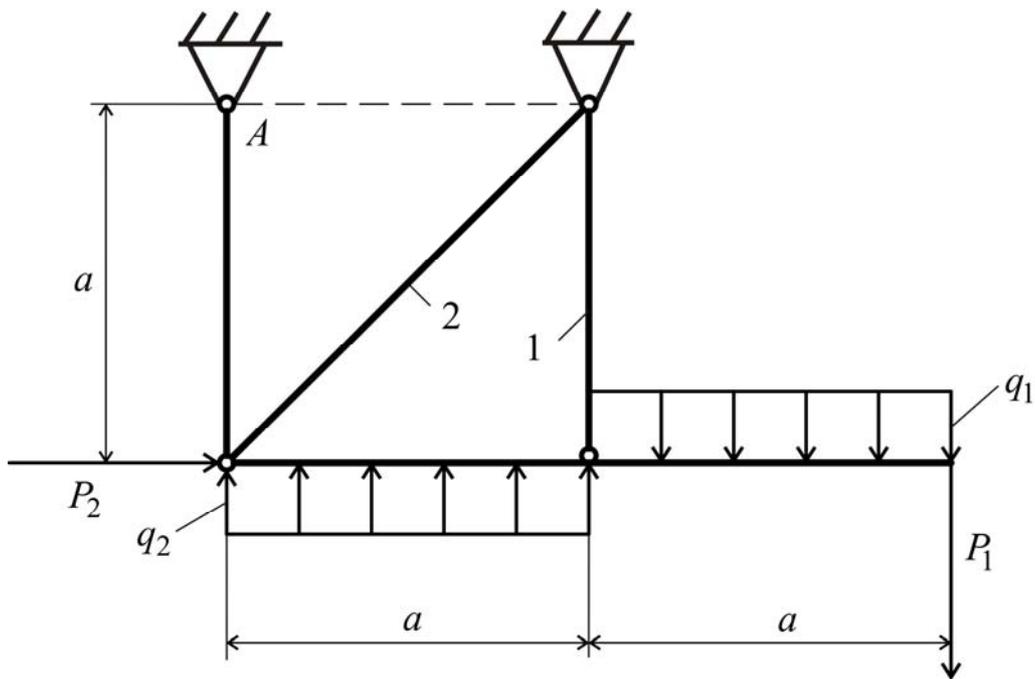


Рисунок 1.10

Таблица 1.1. Числовые данные для различных вариантов

№	Рис.	$P_1$	$P_2$	$q_1$	$q_2$	$\alpha$	$\beta$	$a$	$\Delta t$	$\Delta$	$F_1$	$F_2$
		кН	кН	кН/м	кН/м	градусов	градусов	м	°С	мм	кН	кН
1	1	50	–	–	25	30	–	2.0	20	0.5	8.0	4.5
2	1	–	60	30	–	45	–	1.9	30	0.6	7.0	5.5
3	1	90	–	40	–	60	–	1.8	40	0.4	6.0	6.5
4	1	–	90	–	40	90	–	1.7	25	0.7	5.0	7.5
5	1	60	70	–	–	30	–	1.6	35	0.75	4.0	8.5
6	2	75	50	–	–	30	0	1.5	24	0.8	4.5	4.0
7	2	65	–	–	20	30	60	1.4	28	0.35	5.5	5.0
8	2	–	–	45	30	60	30	1.3	32	0.45	6.5	6.0
9	2	–	90	55	–	45	45	1.2	36	0.3	7.5	7.0
10	2	95	–	65	50	0	45	1.1	42	0.4	8.5	8.0
11	3	–	75	55	–	90	90	1.0	40	0.5	4.5	8.0
12	3	65	–	–	65	30	60	1.1	38	0.55	5.5	7.0
13	3	75	65	–	–	60	30	1.2	32	0.6	6.5	6.0
14	3	60	60	25	–	45	45	1.3	36	0.4	7.5	5.0
15	3	–	–	60	50	90	60	1.4	35	0.7	8.5	4.0
16	4	90	100	50	–	90	90	1.5	30	0.75	4.0	4.5
17	4	70	–	–	40	30	60	1.6	25	0.8	5.0	5.5
18	4	–	90	30	–	60	30	1.7	20	0.85	6.0	6.5

		$P_1$	$P_2$	$q_1$	$q_2$	$\alpha$	$\beta$	$a$	$\Delta t$	$\Delta$	$F_1$	$F_2$
19	4	70	85	–	–	45	45	1.8	30	0.3	7.0	7.5
20	4	–	–	60	25	45	30	1.9	40	0.35	8.0	8.5
21	5	95	–	–	20	90	90	2.0	42	0.4	5.0	4.5
22	5	–	70	30	–	45	45	2.1	45	0.45	6.0	7.5
23	5	–	–	35	30	60	30	2.0	30	0.5	4.0	4.5
24	5	80	60	–	–	30	60	1.9	28	0.6	4.5	5.0
25	5	–	55	25	60	90	45	1.8	32	0.4	5.5	6.5
26	6	70	–	–	55	90	90	1.7	25	0.3	6.5	4.0
27	6	–	60	45	–	45	45	1.6	30	0.35	7.0	4.5
28	6	–	–	50	45	30	60	1.5	28	0.6	8.0	4.0
29	6	55	70	–	–	60	30	1.4	32	0.65	8.5	5.0
30	6	50	75	–	35	90	45	1.3	36	0.5	7.5	4.0
31	7	70	–	–	30	90	90	1.2	38	0.55	6.0	5.5
32	7	–	85	35	–	45	45	1.1	40	0.4	6.5	5.0
33	7	–	–	40	20	30	60	1.0	42	0.45	5.5	4.5
34	7	60	95	–	–	60	30	0.9	28	0.5	4.0	8.0
35	7	75	–	50	40	90	45	1.0	26	0.55	7.0	6.5
36	8	65	–	–	50	0	45	1.1	25	0.6	6.5	7.0
37	8	–	85	40	–	45	0	1.2	20	0.65	4.5	5.0
38	8	–	–	35	60	45	45	1.3	22	0.7	5.0	4.0
39	8	95	75	–	–	60	30	1.4	24	0.75	8.0	4.5
40	8	90	70	25	–	30	60	1.5	30	0.8	8.5	5.0
41	9	85	–	–	40	–	–	1.6	32	0.85	7.5	6.0
42	9	–	60	30	–	–	–	1.7	28	0.9	6.5	5.0
43	9	–	–	35	30	–	–	1.8	36	0.6	5.0	4.0
44	9	70	50	–	–	–	–	1.9	38	0.65	4.5	5.0
45	9	65	–	–	40	–	–	2.0	35	0.5	8.0	7.0
46	10	60	–	–	45	–	–	2.1	33	0.55	7.5	5.5
47	10	–	65	40	–	–	–	1.9	30	0.4	6.5	6.0
48	10	–	–	35	55	–	–	1.8	28	0.7	5.0	4.5
49	10	60	80	–	–	–	–	1.7	25	0.75	6.0	7.0
50	10	65	–	25	60	–	–	1.6	20	0.8	8.5	4.0

### Пример выполнения задания

Рассмотрим абсолютно жесткий брус  $AC$ , который имеет шарнирно-неподвижную опору в точке  $A$ , поддерживается двумя стальными стержнями 1 и 2 и загружен на участке  $BC$  распределенной нагрузкой  $q = 200$  кН/м. Температура стержня 1 в период эксплуатации может повышаться на  $\Delta t = 35^\circ C$ . Стержень 2 выполнен короче проектного разме-

ра на  $\Delta = 1$  мм, но при монтаже зазор закрывается. Определить усилия в стержнях 1 и 2. При расчете принять  $a = 1$  м,  $h = 0.8$  м,  $F_1 = 6$  см<sup>2</sup>,  $F_2 = 9$  см<sup>2</sup>,  $E = 210$  ГПа,  $\alpha = 125$  град<sup>-1</sup>. Расчетная схема изображена на рис. 1.11.

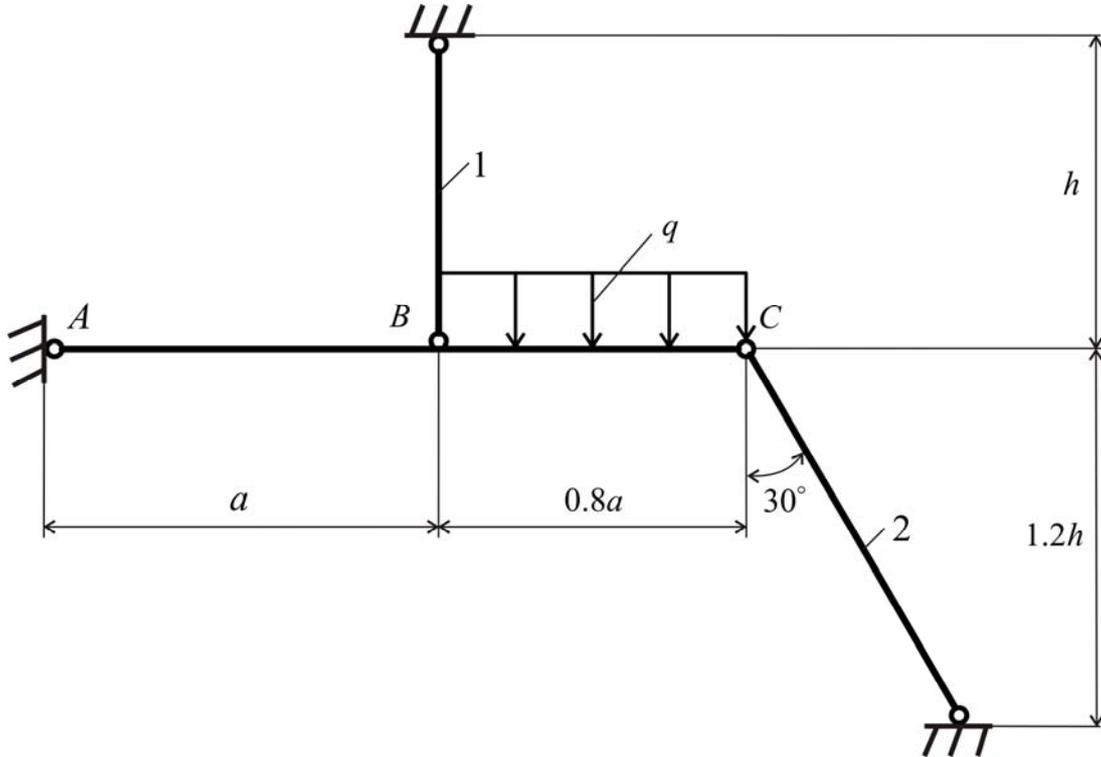


Рисунок 1.11

Обозначим неизвестные усилия в стержнях  $N_1$  и  $N_2$ , опорные реакции  $X_A$ ,  $Y_A$ , то есть в данной задаче число неизвестных составляет  $n = 4$ . Система сил произвольно расположена в плоскости, для нее можно составить три уравнения равновесия, следовательно  $n_{cm} = 3$ . Степень статической неопределимости

$$C = n - n_{cm} = 1.$$

Таким образом, задача один раз статически неопределима.

Составим уравнения равновесия

$$\Sigma M_A = 0,$$

$$N_1 \cdot a - N_2 \cdot 1.8a \cdot \cos 30^\circ - q \cdot 0.8a \cdot 1.4a = 0,$$

$$N_1 - 1.56 \cdot N_2 - 1.12 \cdot qa = 0. \quad (1.2)$$

Для составления дополнительного уравнения рассмотрим деформацию системы, представленную на рис. 1.12.

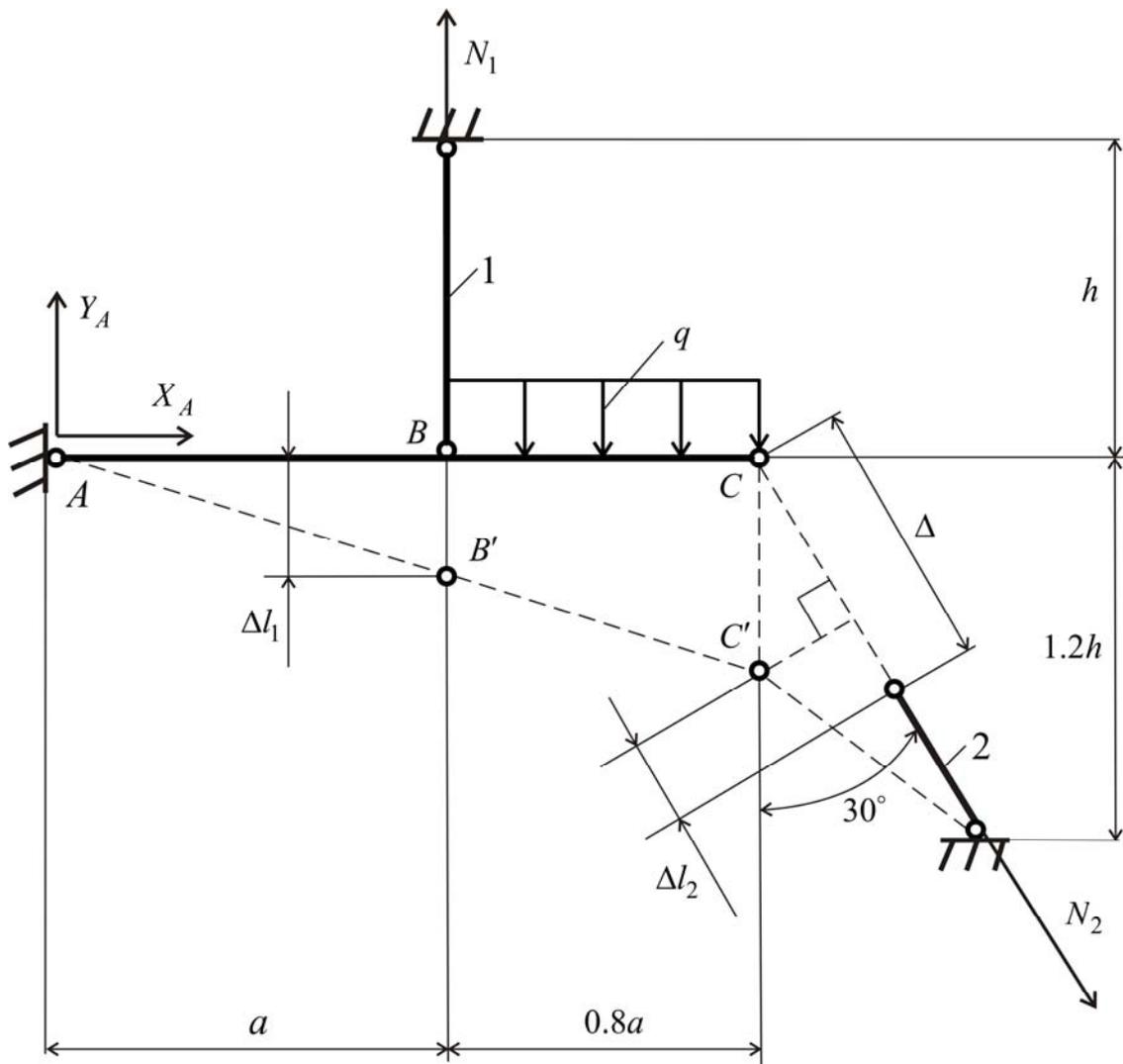


Рисунок 1.12

Будем считать, что точки  $B$  и  $C$  при этом перемещаются вертикально вниз. Тогда из подобия треугольников можно записать:

$$\frac{BB'}{a} = \frac{CC'}{1.8a}.$$

Выразим перемещения  $BB'$  и  $CC'$  через деформации стержней

$$BB' = \Delta l_1 = \Delta l_1^N + \Delta l_1^t,$$

$$CC' = \frac{\Delta - \Delta l_2}{\cos 30^\circ},$$

где  $\Delta l_1^N$  – деформация стержня 1 под действием возникающей в нем продольной силы  $N_1$ ,  $\Delta l_1^t$  – деформация стержня 1 под действием темпе-

ратуры,  $\Delta$  – отклонение от проектного размера длины стержня 2,  $\Delta l_2 = \Delta l_2^N$  – деформация стержня 2 под действием возникающей в нем продольной силы  $N_2$ . Таким образом, связь между деформациями стержней 1 и 2 имеет вид:

$$\frac{\Delta l_1^N + \Delta l_1^t}{a} = \frac{\Delta - \Delta l_2^N}{1.8a \cdot \cos 30^\circ}. \quad (1.3)$$

Представим уравнение (1.3) в физической форме с учетом следующих выражений:

$$\Delta l_1^N = \frac{N_1 l_1}{EF_1}, \quad \Delta l_1^t = \alpha \Delta t \cdot h, \quad \Delta l_2^N = \frac{N_2 \cdot 1.2h}{EF_2 \cos 30^\circ}.$$

В результате получим

$$\frac{1}{a} \left( \frac{N_1 l_1}{EF_1} + \alpha \Delta t \cdot h \right) = \frac{1}{1.8a \cdot \cos 30^\circ} \left( \Delta - \frac{N_2 \cdot 1.2h}{EF_2 \cos 30^\circ} \right),$$

$$N_1 + 0.6N_2 - 46 \cdot 10^3 = 0. \quad (1.4)$$

Таким образом, получим систему двух уравнений (1.2) и (1.4), которые содержат два неизвестных усилия  $N_1$  и  $N_2$ . Решая эту систему, получим:

$$N_1 = 95.8, \quad N_2 = -82.5 \text{ кН.}$$

## 2. Прямой поперечный изгиб

### 2.1. Поперечная сила и изгибающий момент.

Изгибом бруса называется деформация, при которой происходит изменение кривизны продольной оси бруса.

Поперечная сила и изгибающий момент определяются методом сечений. Величина поперечной силы  $Q$  в каком-нибудь сечении балки, определяемом абсциссой  $x$ , равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил (сосредоточенных и распределенных), действующих на балку по одну сторону от рассматриваемого сечения. Величина изгибающего момента  $M$  в каком-нибудь сечении балки равна алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих на балку по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно одной из главных центральных осей инерции сечения.

Положительным и отрицательным принято считать значения  $Q$  и  $M$ , соответствующим тем направлениям, которые указаны на рис.2.1.

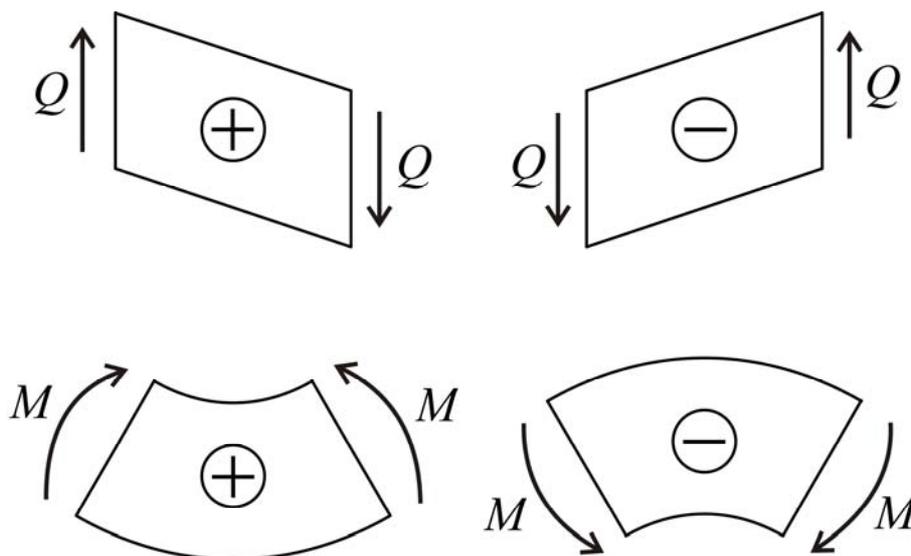


Рис. 2.1. Правило знаков для поперечных сил и изгибающих моментов

Если распределенная нагрузка оканчивается, не доходя до рассматриваемого сечения, как показано на рис. 2.2, ее можно заменить сосредоточенной силой, численно равной площади эпюры этой нагрузки, при-

ложенной в сечении, проходящем через центр тяжести площади эпюры распределенной нагрузки.

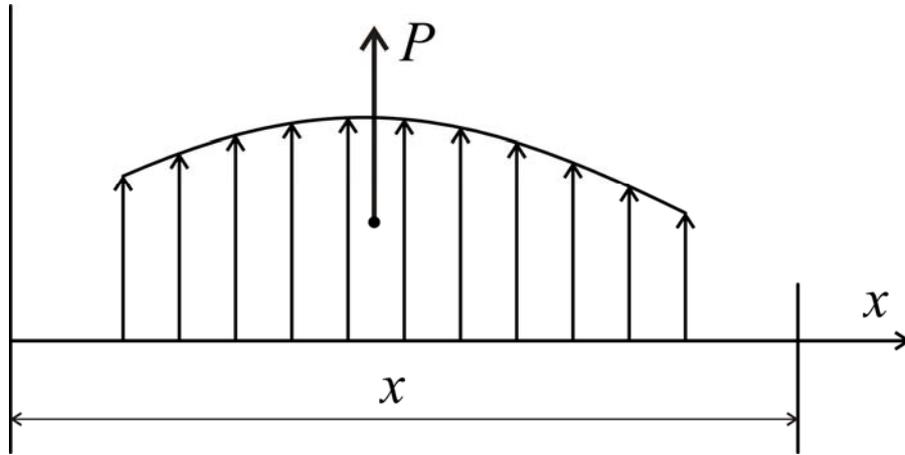


Рис. 2.2. Распределенная нагрузка

Можно рекомендовать подходить к сечению с той стороны балки, которая менее нагружена, и строить сначала эпюру  $Q$ , а потом эпюру  $M$ .

Из определения  $Q$  следует, что в сечении, в котором приложена сосредоточенная сила, на эпюры поперечной силы должен быть скачок на величину этой внешней силы. Из определения  $M$  следует, что в сечении, в котором приложена пара сил, на эпюре изгибающего момента должен быть скачок на величину момента этой внешней пары сил.

Для балок, на которые не действуют распределенные пары сил, вызывающие изгиб, при построении эпюр  $Q$  и  $M$ , а также для проверки их правильности, необходимо пользоваться следующими дифференциальными зависимостями между  $M$ ,  $Q$  и  $q$ , и следствиями из них вытекающими:

$$Q = \frac{dM}{dx}, \quad (2.1)$$

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}, \quad (2.2)$$

где  $q$  – интенсивность распределенной нагрузки. Основные следствия из зависимостей (2.1) и (2.2):

- 1) поперечная сила претерпевает разрыв только в точке приложения сосредоточенной силы на величину этой силы;
- 2) на незагруженном участке поперечная сила постоянна;

- 3) на равномерно загруженном участке поперечная сила есть линейная функция координаты  $x$ , возрастающая, если нагрузка положительна;
- 4) изгибающий момент претерпевает разрыв только в точке приложения сосредоточенного момента на величину этого момента;
- 5) на незагруженных участках эпюра моментов есть прямая, наклон которой пропорционален поперечной силе;
- 6) эпюра моментов образует изломы только там, где поперечная сила разрывна, то есть в точках приложения сосредоточенных сил;
- 7) изгибающий момент принимает экстремальные значения там, где поперечная сила равна нулю;
- 8) на свободном конце или концевой эпюре изгибающий момент равен нулю, если там не приложен внешний момент;
- 9) на равномерно загруженном участке эпюра изгибающих моментов есть парабола, обращенная выпуклостью вверх, если нагрузка положительна (направлена вниз).

## 2.1. Нормальные напряжения и подбор поперечного сечения балки.

Нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения балки при изгибе определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{M}{J} y, \quad (2.3)$$

где  $M$  – изгибающий момент в рассматриваемом поперечном сечении,  $y$  – координата рассматриваемой точки сечения до нейтральной оси,  $J$  – момент инерции площади этого сечения относительно нейтральной оси.

Для балок, материал которых одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то есть, когда  $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$  необходимые размеры поперечного сечения подбирают по нормальным напряжениям, развивающимся в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси. Расчетная формула на изгиб для подбора сечения в этом случае записывается в следующем виде

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]}, \quad (2.4)$$

где  $W = J/|y_{\max}|$  – момент сопротивления площади поперечного сечения балки относительно нейтральной оси,  $|y_{\max}|$  – расстояние до волокна, наиболее удаленного от нейтральной оси,  $M_{\max}$  – наибольший по абсо-

лутному значению изгибающий момент,  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение материала балки на изгиб. Отклонение от равенства (2.4) не должно превышать  $\pm 5\%$ .

## 2.2. Касательные напряжения. Проверки прочности по касательным напряжениям.

В произвольной точке прямоугольного поперечного сечения балки, представленного на рис. 2.3, величину касательного напряжения определяют по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{QS}{bJ}, \quad (2.5)$$

где  $Q$  – поперечная сила в рассматриваемом сечении,  $S = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$  –

статически момент относительно нейтральной оси  $Oz$  части площади сечения, лежащей по одну сторону от уровня  $y$ , на котором определяется напряжение,  $b$  – ширина сечения,  $J$  – момент инерции площади сечения относительно оси  $Oz$ .

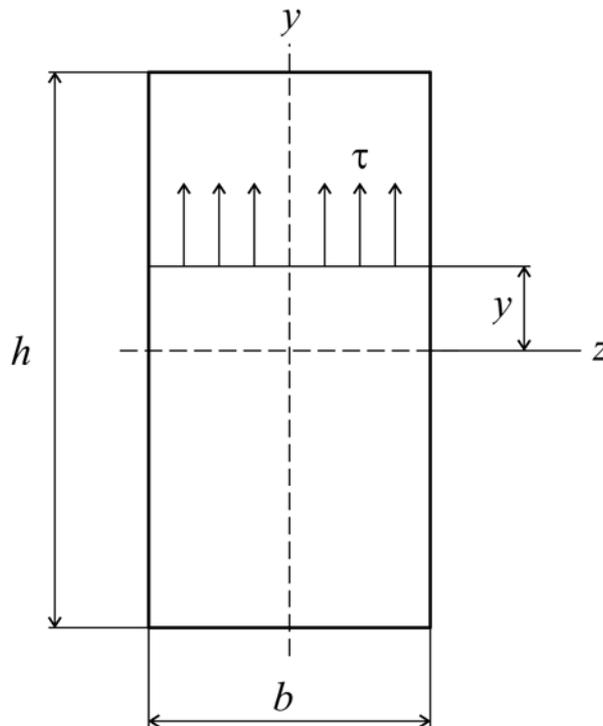


Рис. 2.3. Прямоугольное поперечное сечение балки

По формуле (2.5) приближенно можно подсчитать составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к нейтральной оси, и для балок прямоугольного сечения, понимая под величиной  $b$  ширину сечения на уровне рассматриваемой точки.

Прочность балки по касательным напряжениям проверяется в точках с максимальными касательными напряжениями того поперечного сечения, в котором действует наибольшая по абсолютному значению поперечная сила  $Q_{\max}$ .

Проверочная формула имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_0}{b_0 J} \leq [\tau], \quad (2.6)$$

где  $S_0$  – статический момент относительно нейтральной оси части поперечного сечения, лежащей по одну сторону линии действия  $\tau_{\max}$ ,  $b_0$  – ширина сечения на линии действия  $\tau_{\max}$ .

Для большинства проверяемых сечений  $\tau_{\max}$  действует в точках нейтральной оси.

### Задание 2.1. Подбор сечения балки

Для стальной балки, представленной на рис. 2.4–2.6 требуется построить эпюры  $Q$  и  $M$ , а также подобрать двутавровое сечение. Допускаемые напряжения  $[\sigma] = 160$  МПа,  $[\tau] = 100$  МПа.

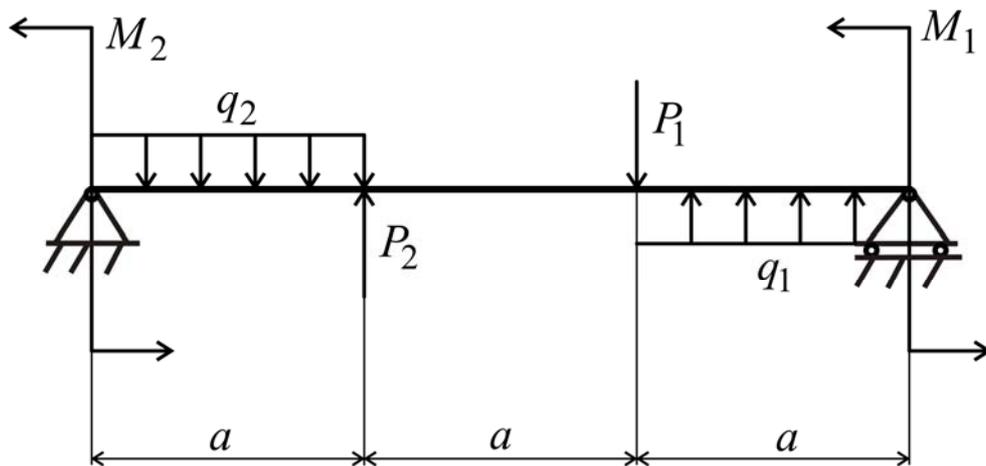


Рисунок 2.4

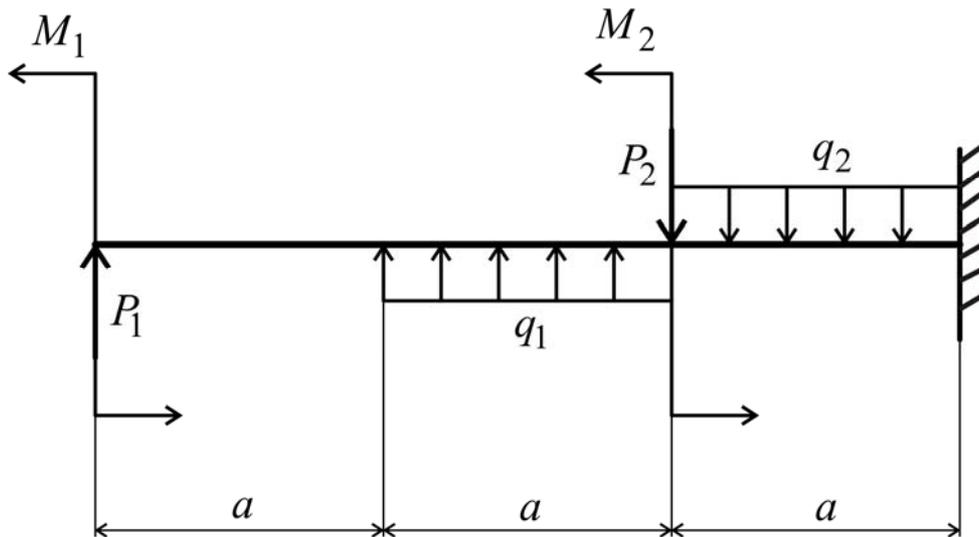


Рисунок 2.5

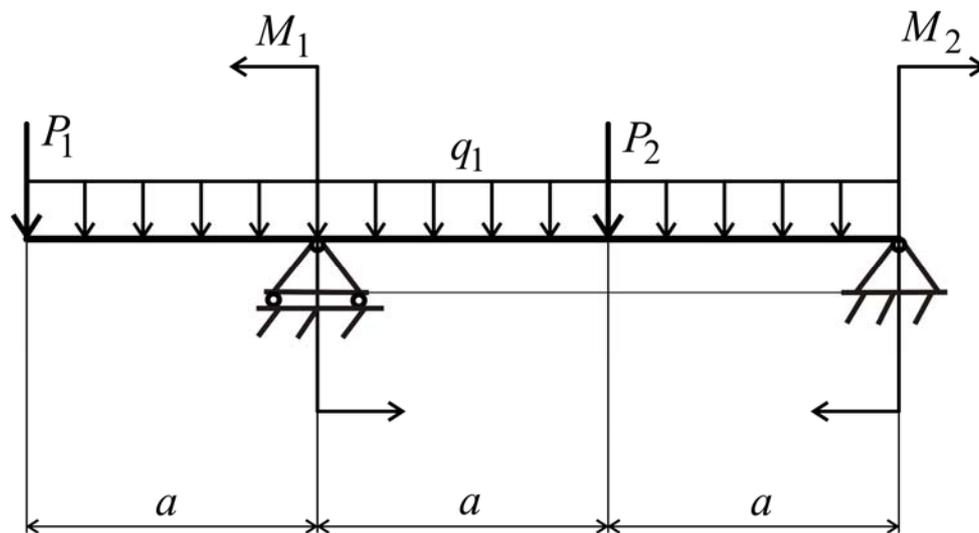


Рисунок 2.6

Данные для расчета приведены в таблице 2.1.

**Таблица 2.1. Числовые данные к заданию 2.1.**

Вариант	Рисунок	$M_1$	$M_2$	$q_1$	$q_2$	$P_1$	$P_1$	$a$ , м
		кН·м		кН/м		кН		
1	2.4	40	30	20	–	–	–	1.0
2	2.4	–	20	10	15	–	–	1.1
3	2.4	–	–	15	20	10	–	1.2

		$M_1$	$M_2$	$q_1$	$q_2$	$P_1$	$P_1$	
4	2.4	–	–	–	40	20	30	1.3
5	2.4	50	–	20	10	–	–	1.4
6	2.4	40	–	–	10	20	–	1.5
7	2.4	30	–	–	–	40	10	1.4
8	2.4	–	40	–	30	10	–	1.3
9	2.4	–	30	–	–	20	20	1.2
10	2.4	–	–	30	20	–	40	1.1
11	2.4	30	40	–	–	–	30	1.0
12	2.4	25	–	30	–	20	–	0.9
13	2.4	20	40	–	–	40	–	2.0
14	2.4	40	20	–	30	–	–	1.9
15	2.4	–	–	25	–	40	50	1.8
16	2.4	35	–	40	–	–	20	1.7
17	2.4	–	45	–	25	–	25	1.8
18	2.4	–	40	35	–	40	–	1.9
19	2.4	–	30	–	40	–	20	2.0
20	2.4	25	–	40	–	–	15	2.1
21	2.5	30	40	40	–	–	–	2.2
22	2.5	–	25	35	40	–	–	2.3
23	2.5	–	–	40	35	25	–	2.4
24	2.5	–	–	–	20	30	40	2.5
25	2.5	40	–	30	25	–	–	2.6
26	2.5	25	–	–	40	20	–	2.7
27	2.5	30	–	–	–	40	50	2.8
28	2.5	–	35	–	25	40	–	2.9
29	2.5	–	40	–	–	50	10	3.0
30	2.5	–	–	45	20	–	40	3.1
31	2.5	30	25	–	–	–	50	3.2
32	2.5	40	–	50	–	20	–	3.0
33	2.5	35	20	–	–	40	–	2.9
34	2.5	20	30	–	15	–	–	2.8
35	2.5	–	–	25	–	40	30	2.7
36	2.5	40	–	30	–	–	20	2.5
37	2.5	–	30	–	20	–	40	2.4
38	2.5	–	40	25	–	50	–	2.3
39	2.5	–	45	–	30	–	40	2.2
40	2.5	30	–	50	–	–	35	2.1
41	2.6	40	30	20	–	–	–	2.0
42	2.6	50	–	–	–	20	30	1.9
43	2.6	–	40	–	–	30	40	1.8
44	2.6	60	30	–	–	–	25	1.7

		$M_1$	$M_2$	$q_1$	$q_2$	$P_1$	$P_1$	
45	2.6	30	–	30	–	40	–	1.6
46	2.6	25	40	–	–	30	–	1.5
47	2.6	–	–	40	–	35	20	1.4
48	2.6	30	–	20	–	–	25	1.3
49	2.6	–	25	50	–	25	–	1.2
50	2.6	35	–	30	–	–	40	1.1

Приведем пример выполнения задания. Рассмотрим балку, нагруженную силой  $P = 40$  кН и распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 30$  кН/м. Геометрические размеры балки  $a = 0.8$  м,  $l = 4$  м. Допускаемые напряжения  $[\sigma] = 160$  МПа,  $[\tau] = 100$  МПа. Схема нагружения балки представлена на рис. 2.7.

Определить номер двутавровой балки.

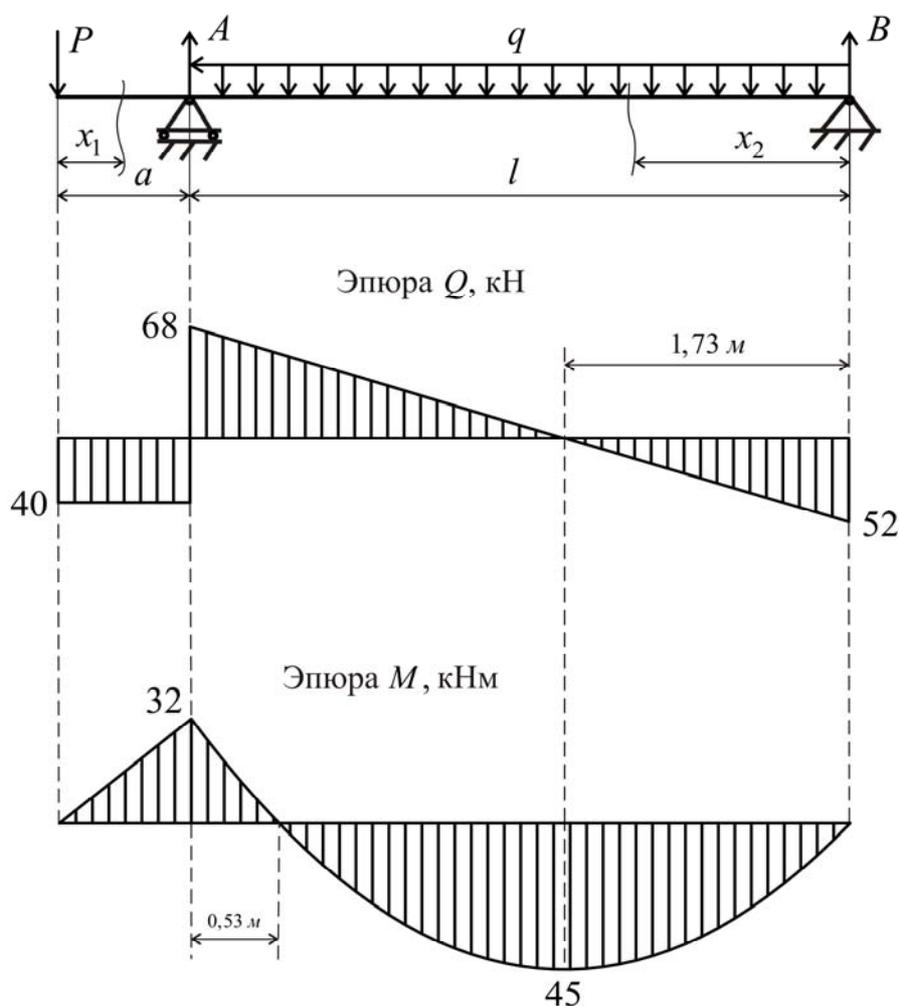


Рис.2.7. Расчетная схема балки, эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Определим опорные реакции:

$$A = \frac{P(a+l) + \frac{q}{2}l^2}{l} = 108 \text{ кН},$$

$$B = \frac{\frac{q}{2}l^2 - Pa}{l} = 52.$$

Для построения эпюр  $Q$  и  $M$  рассмотрим участок балки, на котором  $0 \leq x_1 \leq a$ . Имеем:

$$Q(x_1) = -P = -40 \text{ кН}, \quad M(x_1) = -Px_1 = -40x_1,$$

$$M(x_1 = 0) = 0, \quad M(x_1 = a) = -40 \cdot 0,8 = -32 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

В пролете между опорами  $0 \leq x_2 \leq l$ :

$$Q(x_2) = -B + qx_2 = -52 + 30x_2,$$

$$Q(x_2 = 0) = -52 \text{ кН}, \quad Q(x_2 = l) = -52 + 30 \cdot 4 = 68 \text{ кН},$$

$$M(x_2) = Bx_2 - \frac{q}{2}x_2^2 = 52x_2 - 15x_2^2,$$

$$M(x_2 = 0) = 0, \quad M(x_2 = l) = 52 \cdot 4 - 15 \cdot 16 = -32 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Поскольку  $Q(x_2) = -52 + 30x_2 = 0$  при  $x_2 = \frac{52}{30} \approx 1,73$  м, то

$M_{\max} = 52 \cdot 1,73 - 15 \cdot 1,73^2 \approx 45$  кН·м. Также заметим, что

$M(x_2) = 52x_2 - 15x_2^2 = 0$ , когда  $x_2 \approx 3,47$  м. По этим данным на рис. 2.7 построены эпюры  $Q$  и  $M$ .

Проведем подбор сечения двутавровой балки. Так как  $M_{\max} = 45$  кН·м, то

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{45 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} \approx 2,81 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 281 \text{ см}^3.$$

По сортаменту для двутавра № 22А находим  $W = 254 \text{ см}^3$ . Оценим погрешность:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{W - W_{\text{№22А}}}{W_{\text{№22А}}} \cdot 100\% = \\ &= \frac{281 - 254}{254} \cdot 100\% = 10,6\% > 5\% \text{ (перенапряжение)}. \end{aligned}$$

Для двутавра № 24 имеем  $W = 289 \text{ см}^3$ . Тогда

$$\delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{W - W_{\text{№24}}}{W_{\text{№24}}} \cdot 100\% \approx -2,77\% \text{ (недонапряжение).}$$

Окончательно выбираем двутавр № 24, для которого  $W = 289 \text{ см}^3$ ,  $J = 3460 \text{ см}^4$ ,  $S_0 = 163 \text{ см}^3$ ,  $h = 24 \text{ см}$ ,  $b = 11,5 \text{ см}$ ,  $t = 0,95 \text{ см}$ ,  $d = b_0 = 0,56 \text{ см}$ .

Этот двутавр будет работать при максимальном нормальном напряжении в крайнем волокне опасного сечения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \approx 156 \text{ МПа.}$$

Выполним проверку сечения балки по касательным напряжениям. Поскольку  $Q_{\max} = 68 \text{ кН}$ , то

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_0}{b_0 J} = \frac{68 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{0,56 \cdot 10^{-2} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} \approx 57 \text{ МПа} < [\tau].$$

Следовательно, выбранный двутавр № 24 будет прочен и по нормальным и по касательным напряжениям.

### 3. Перемещения при изгибе

Перемещения сечений балок характеризуются:

- 1) линейными перемещениями центров тяжести поперечных сечения в направлении, перпендикулярном к геометрической оси балки  $Ox$ , которые называются прогибами  $f$ ;
- 2) угловыми перемещениями поперечных сечений вокруг нейтральной оси балки, которые называются углами поворота сечений  $\theta$ .

Прогиб  $f$  считается положительным, если его направление совпадает с положительным направлением оси  $Oy$ , перпендикулярной к геометрической оси балки  $Ox$ . Угол поворота  $\theta$  считается положительным, если поворот поперечного сечения балки вокруг нейтральной оси происходит против часовой стрелки.

Максимальные и минимальные прогибы  $f_{\max}$ ,  $f_{\min}$  и углы поворота  $\theta_{\max}$ ,  $\theta_{\min}$  оцениваются по их абсолютным значениям.

Так как поперечная сила оказывает заметное влияние на деформацию только коротких балок, то обычно  $f$  и  $\theta$  определяют лишь от изгибающего момента.

Величины  $f$  и  $\theta$  можно определять методом начальных параметров, графоаналитическим и другими методами.

#### 3.1. Метод начальных параметров

За начальные параметры принимают прогиб  $f_0$  и угол поворота  $\theta_0$  поперечного сечения балки, в центре тяжести которого расположено начало координат. Целесообразно начало координат располагать в центре тяжести конечного сечения балки.

Уравнения, определяющие  $f$  и  $\theta$  в произвольном сечении балки, находящемся на расстоянии  $x$  от начала координат (если интенсивности распределенных нагрузок  $q$  являются степенными функциями), записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} EIf = EIf_0 + EI\theta_0 \frac{x}{1!} + \sum \frac{1}{2!} M(x - a_m)^2 + \sum \frac{1}{3!} P(x - a_p)^3 + \\ + \sum \frac{1}{4!} q_{a_q} (x - a_q)^4 - \sum \frac{1}{4!} q_{b_q} (x - b_q)^4 + \\ + \sum \frac{1}{5!} q'_{a_q} (x - a_q)^5 - \sum \frac{1}{5!} q'_{b_q} (x - b_q)^5 + \dots, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
EI\theta = EI\theta_0 + \sum \frac{1}{1!} M(x - a_m) + \sum \frac{1}{2!} P(x - a_p)^2 + \\
+ \sum \frac{1}{3!} q_{a_q} (x - a_q)^3 - \sum \frac{1}{3!} q_{b_q} (x - b_q)^3 + \\
+ \sum \frac{1}{4!} q'_{a_q} (x - a_q)^4 - \sum \frac{1}{4!} q'_{b_q} (x - b_q)^4 + \dots,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где  $E$  – модуль продольной упругости материала балки;  $J$  – момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси;  $M$  – моменты внешних пар сил;  $a_m$  – расстояния от начала координат до сечений, в которых приложены пары сил, показанные на рис. 3.1 А;  $P$  – сосредоточенные поперечные силы (в том числе реактивные);  $a_p$  – расстояния их точек приложения на оси балки от начала координат, обозначенные на рис. 3.1 В;  $q_{a_q}$  и  $q'_{a_q}$  – соответственно значения  $q$ , первой и прочих производных  $q$  по переменной  $x$  при  $x = a_q$ , то есть для поперечных сечений, с которых начинается действие распределенной нагрузки;  $q_{b_q}$  и  $q'_{b_q}$  – соответственно значения  $q$ , первой и прочих производных  $q$  по переменной  $x$  при  $x = b_q$ , то есть для поперечных сечений, в которых заканчивается действие распределенных сил перед рассматриваемыми сечениями. Расстояния  $a_q$  и  $b_q$  обозначены на рис. 3.1 С.

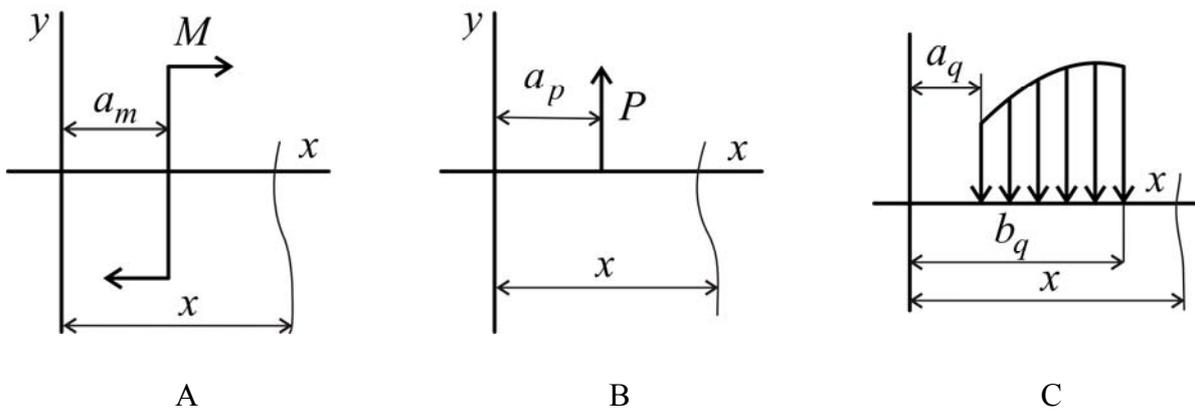


Рис. 3.1. Расстояния точек приложения моментов сил (А), сосредоточенных нагрузок (В) и распределенных нагрузок (С)

Если начало координат расположить в центре тяжести правого концевого сечения балки и ось  $Ox$  направить влево, то при указанном направлении нагрузок в формулах (3.1) и (3.2) у членов, отражающих

влияние моментов внешних сил, знаки будут отрицательными; направление поворота сечения балки, найденное по формуле (3.2) окажется противоположным ранее принятому.

Два начальных параметра  $f_0$  и  $\theta_0$  находят из следующих условий закрепления балки:

- 1) в заделке прогиб и угол поворота сечения равны нулю;
- 2) на шарнирных опорах прогибы равны нулю.

Целесообразно записывать только одно уравнение (3.1) и одно уравнение (3.2) для произвольного сечения последнего участка балки, включая нагрузки в той последовательности, в которой они расположены от начала координат. Каждое из этих уравнений пригодно для определения  $f$  и  $\theta$  на любом участке балки, если в них отчеркнуть число членов, соответствующих нагрузкам на предшествующих участках.

Для заданной статически неопределимой балки составляют общие интегралы дифференциальных уравнений упругой линии через начальные параметры. Начальные параметры и реактивные составляющие определяют из условий закрепления балки и из условий статики.

### **Задание 3.1. Применение метода начальных параметров к раскрытию статически неопределимой балки.**

Для балки постоянного сечения, представленной на рис. 3.2 – 3.4, найти опорные реакции, построить эпюры поперечных сил, изгибающих моментов и упругую линию балки. Жесткость балки на изгиб принять равной  $EI$ .

При раскрытии статической неопределимости применить метод начальных параметров. Данные для расчета приведены в таблице 3.1.

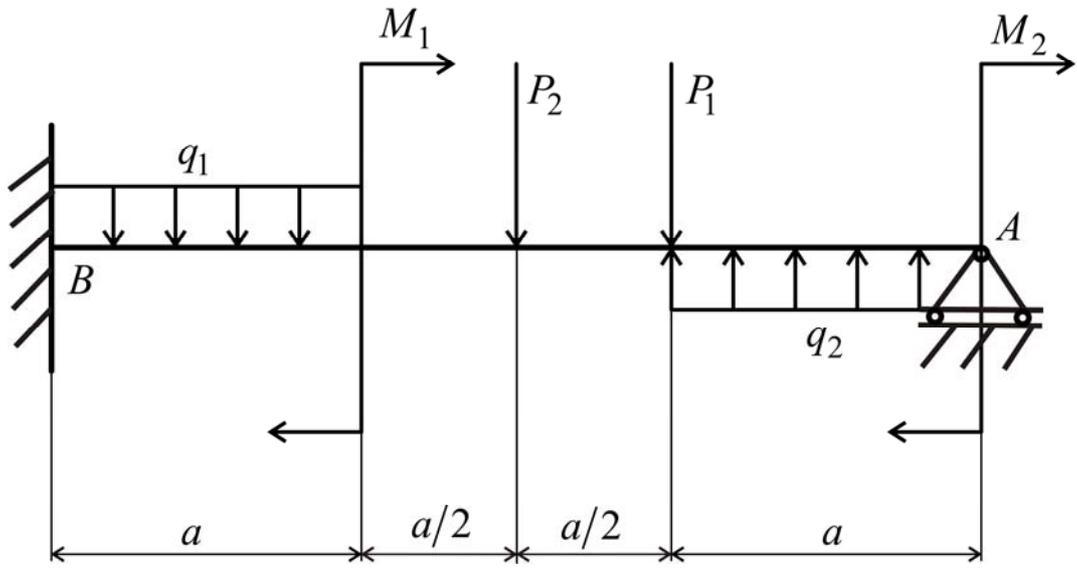


Рисунок 3.2

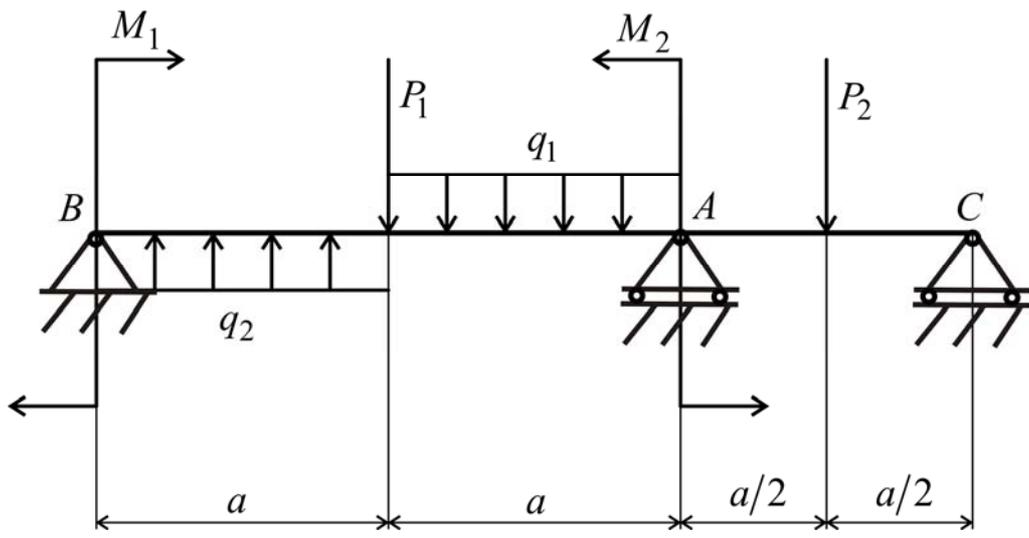


Рисунок 3.3

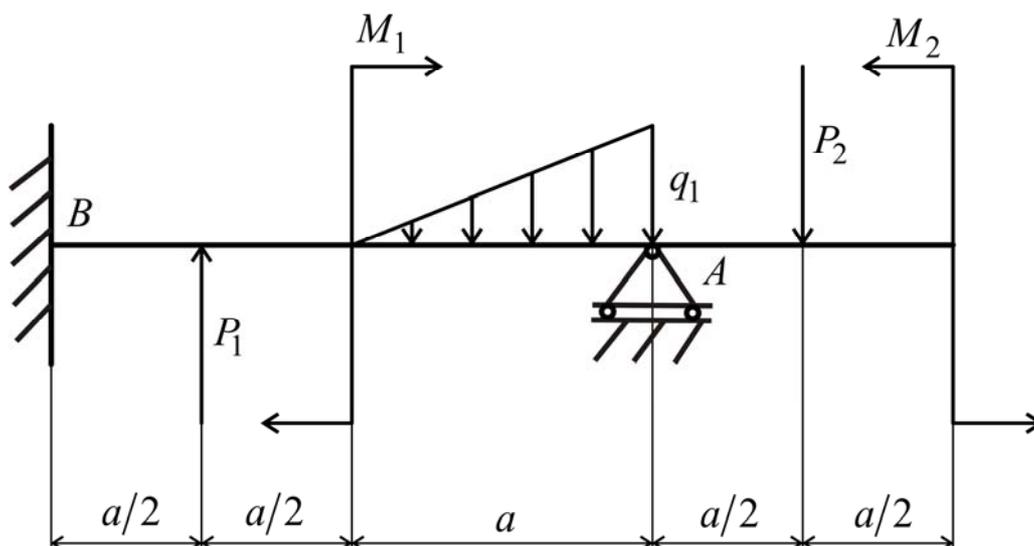


Рисунок 3.4

Таблица 3.1. Числовые значения к заданию 3.1.

Вариант	Рисунок	$P_1$	$P_2$	$q_1$	$q_2$	$M_1$	$M_2$
1	3.2	$qa$	–	$q$	–	$qa^2$	–
2	3.2	–	$qa$	–	$q$	–	$qa^2$
3	3.2	$qa$	–	$q$	$q$	–	–
4	3.2	–		$q$	$2q$	–	–
5	3.2	$qa$	$qa$	–	–	$qa^2$	–
6	3.2	$2qa$	$qa$	–	–	–	$qa^2$
7	3.2	$qa$	–	–	–	$qa^2$	$2qa^2$
8	3.2	–	–	–	$q$	$2qa^2$	$qa^2$
9	3.2	$qa$	–	$q$	–	–	$qa^2$
10	3.2	–	$2qa$	–	–	$qa^2$	$2qa^2$
11	3.2	–	–	$2q$	–	$qa^2$	$qa^2$
12	3.2	–	$qa$	–	$q$	$qa^2$	–
13	3.2	–	–	$2q$	$q$	$qa^2$	–
14	3.2	$qa$	$qa$	–	$q$	–	–
15	3.2	$qa$	$qa$	$q$	–	–	–
16	3.2	$2qa$	–	–	$q$	$qa^2$	–

Вариант	Рисунок	$P_1$	$P_2$	$q_1$	$q_2$	$M_1$	$M_2$
17	3.2	–	$qa$	$q$	–	–	$qa^2$
18	3.2	–	$qa$	$q$	–	$qa^2$	–
19	3.2	–	–	$2q$	$q$	–	$qa^2$
20	3.2	$qa$	–	–	$q$	–	$qa^2$
21	3.3	$qa$	–	$q$		$qa^2$	–
22	3.3	–	$qa$	–	$q$	–	$qa^2$
23	3.3	$qa$	–	$q$	$q$	–	–
24	3.3	–	$2qa$	$q$	$2q$	–	–
25	3.3	$qa$	$qa$	–	–	$qa^2$	–
26	3.3	$2qa$	$qa$	–	–	–	$qa^2$
27	3.3	$qa$	–	–	–	$qa^2$	$2qa^2$
28	3.3	–	–	–	$q$	$2qa^2$	$qa^2$
29	3.3	$qa$	–	$q$	–	–	$qa^2$
30	3.3	–	$2qa$	–	–	$qa^2$	$2qa^2$
31	3.3	–	–	$2q$	–	$qa^2$	$qa^2$
32	3.3	–	$qa$	–	$q$	$qa^2$	–
33	3.3	–	–	$2q$	$q$	$qa^2$	–
34	3.3	$qa$	$qa$	–	$q$	–	–
35	3.3	$qa$	$qa$	$q$	–	–	–
36	3.3	$2qa$	–	–	$q$	$qa^2$	–
37	3.3	–	$qa$	$q$	–	–	$qa^2$
38	3.3	–	$qa$	$q$	–	$qa^2$	–
39	3.3	–	–	$2q$	$q$	–	$qa^2$
40	3.3	$qa$	–	–	$q$	–	$qa^2$
41	3.4	$qa$	$2qa$	$q$	–	–	–
42	3.4	–	$qa$	$q$	–	$qa^2$	–
43	3.4	–	–	$2q$	–	$qa^2$	$qa^2$
44	3.4	$qa$	–	$q$	–	$2qa^2$	–
45	3.4	–	$qa$	$q$	–	–	$qa^2$
46	3.4	$qa$	$qa$	–	–	$qa^2$	–

Вариант	Рисунок	$P_1$	$P_2$	$q_1$	$q_2$	$M_1$	$M_2$
47	3.4	$qa$	$qa$	–	–	–	$qa^2$
48	3.4	$2qa$	–	–	–	$qa^2$	$qa^2$
49	3.4	–	$qa$	–	–	$qa^2$	$2qa^2$
50	3.4	$qa$	–	$q$	–	–	$qa^2$

Рассмотрим пример выполнения задания. Будем считать заданными интенсивность распределенной нагрузки  $q$ , длину пролета  $l$ , модуль упругости  $E$  и момент инерции  $I$ . Расчетная схема балки представлена на рис. 3.5. Определить реакции  $A$ ,  $B$  и  $C$ , реактивный момент  $M_B$ , прогибы  $f$  и углы поворота  $\theta$ , а также построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .

Поскольку на левой опоре  $f_0 = 0$ , в соответствии с уравнениями (3.1) и (3.2) функции прогиба и угла поворота запишутся следующим образом:

$$EJf = EI\theta_0 x + \frac{Ax^3}{6} - \frac{qx^5}{120l},$$

$$EJ\theta = EI\theta_0 + \frac{Ax^2}{2} - \frac{qx^4}{24l}.$$

По условию закрепления балки  $f(x=l) = 0$ ,  $\theta(x=l) = 0$ :

$$EJf(x=l) = EI\theta_0 l + \frac{Al^3}{6} - \frac{ql^4}{120} = 0,$$

$$EJ\theta(x=l) = EI\theta_0 + \frac{Al^2}{2} - \frac{ql^3}{24}.$$

Отсюда

$$A = \frac{ql}{10}, \quad \theta_0 = \frac{1}{EJ} \left( \frac{ql^3}{24} - \frac{ql^3}{20} \right) = -\frac{ql^3}{120EJ}.$$

Таким образом

$$EJf = -\frac{ql^3 x}{120} + \frac{qlx^3}{60} - \frac{qx^5}{120l},$$

$$EJ\theta = -\frac{ql^3}{120} + \frac{qlx^2}{20} - \frac{qx^4}{24l}.$$

Из второго уравнения, полагая  $\theta = 0$ , найдем значение координаты, при которой прогиб достигает максимального значения. Имеем

$$x^4 - \frac{6x^2l^2}{5} + \frac{l^4}{5} = 0.$$

Отсюда находим  $x = l/\sqrt{5}$ . Тогда

$$f_{\max} = f\left(x = l/\sqrt{5}\right) = -\frac{2}{375} \frac{ql^4}{EJ}.$$

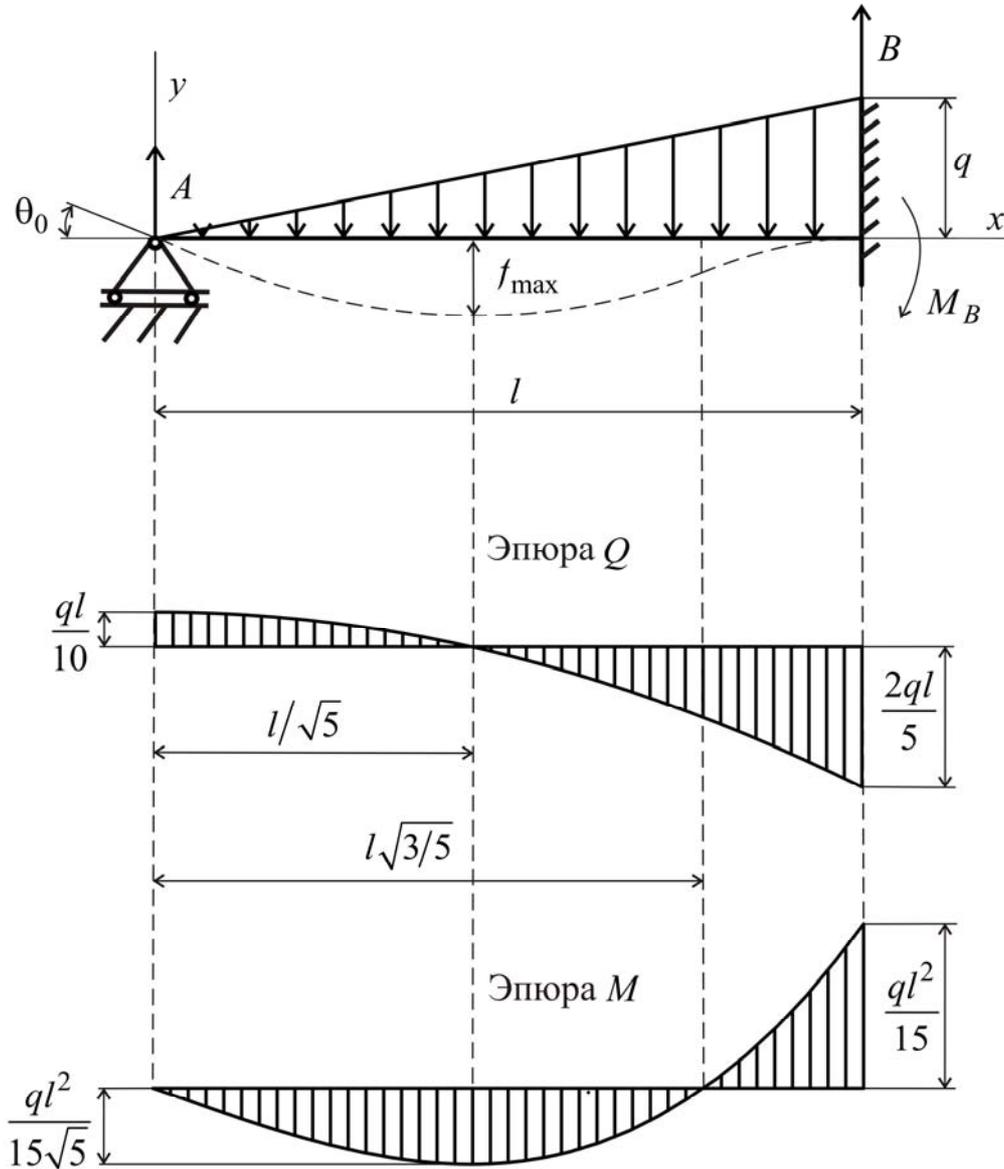


Рис. 3.5. Расчетная схема балки, эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Поперечная сила и изгибающий момент выражаются функциями:

$$Q(x) = \frac{ql}{10} - \frac{qx^2}{2l}, \quad M(x) = \frac{qlx}{10} - \frac{qx^3}{6l}.$$

Полагая  $M = 0$ , находим значение  $x = l\sqrt{3/5}$ , при котором упругая линия имеет точку перегиба. Полагая  $Q = 0$ , получаем  $x = l\sqrt{5}$ , при котором изгибающий момент достигает максимального значения:

$$M_{\max} = M\left(x = l/\sqrt{5}\right) = \frac{ql^2}{15\sqrt{5}},$$

$$Q(x=0) = \frac{ql}{10} = A, \quad Q(x=l) = -\frac{2}{5}ql = -B,$$

$$M(x=0) = 0, \quad M(x=l) = -\frac{1}{15}ql^2 = M_B.$$

Используем полученные результаты для построения эпюр поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ . Результаты построения представлены на рис. 3.5.

$$A \ B \ C \ q \ q_2 \ Q \ M \ P_1 \ P_2 \ \frac{ql^2}{15\sqrt{5}} \ f_{\max}$$