

Федеральное агентство по образованию

Ухтинский государственный технический университет

**Расчетно-проектировочные работы
по дисциплине «Сопротивление материалов»**

Часть I

Методические указания, содержание и примеры выполнения

УХТА 2008

УДК 539.3/6

В

Власов, В.П. Расчетно-проектировочные работы по дисциплине «Сопротивление материалов» [Текст]: метод. указания, содержание и примеры выполнения / В.П. Власов. Часть I. – Ухта: УГТУ, 2008. – 21 с.: ил. 16, табл. 7.

Методические указания, содержание и примеры выполнения предназначены для выполнения расчетно-проектировочных работ по дисциплине «Сопротивление материалов» для студентов инженерно-строительных специальностей.

Расчетно-проектировочные работы соответствуют рабочим программам. Рассмотрены и утверждены кафедрой «Сопротивление материалов и детали машин» от 18.01.2008г., пр. № 5.

Рецензент Кучерявый В.И., профессор кафедры СМ и ДМ
Редактор Коновалов М.Н.

В методических указаниях учтены предложения рецензента и редактора.

План 2008 г., позиция 145.

Подписано в печать 17.03.2008 г.

Объем 21 с. Тираж 50 экз. Заказ № 218.

© Ухтинский государственный технический университет, 2008
169300, г. Ухта, ул. Первомайская, 13.

Отдел оперативной полиграфии УГТУ.
169300, г. Ухта, ул. Октябрьская, 13.

ВВЕДЕНИЕ

Расчетно-проектировочные работы предусмотрены учебным планом. Их выполнение обязательно для всех студентов. Сроки выполнения работ утверждаются деканатом.

Работы оформляются чернилами на бумаге формата А4(210 x 297) с оставлением полей со всех сторон. Рисунки выполняются помощью чертежных принадлежностей с соблюдением масштаба. В отдельных случаях с целью большей наглядности допускается отступление от соблюдения масштаба. Буквенные обозначения на рисунках должны содержать число, если они его имеют. Все графики, если они связаны друг с другом, выполняются на одном листе. Их расположение должно соответствовать смысловой связи. Рисунки и графики должны иметь сквозную нумерацию, например, рис. 1, рис. 2 и т.д. Таблицы нумеруются аналогично нумерации рисунков. Например, над таблицей пишется: Таблица 1 и т.д.

Страницы расчетной части вместе с графиками, рисунками и таблицами должны иметь сквозную нумерацию, начиная с титульного листа (на самом титульном листе номер не ставится).

При оформлении расчетной части работы вначале пишется тема задач и номера задач. После этого пишется условие первой задачи и приводится ее решение. Затем второй задачи и т.д. При решении задач приводятся пояснения формул и переход от одного уравнения к другому. При получении числового ответа пишется формула, затем она в точности повторяется в числах и пишется ответ. В конце решения задачи пишутся ответы (если они короткие) на поставленные вопросы в условии задачи или делается ссылка на рисунок или таблицу, если в них заключены ответы. Работа оформляется разборчивым почерком.

Исходные данные к задачам выписываются из таблиц согласно номеру шифра. Каждому студенту выдается свой номер шифра. Например, номер шифра 245480. Под цифрами этого номера выписываем по порядку первые шесть букв русского алфавита, в результате чего получаем столбец из двух строк

2 4 5 4 8 0	
а б в г д е	(А)

Допустим, нужно найти численное значение силы P_1 . Все численные значения силы P_1 стоят в столбце (см. табл. 1), который внизу обозначен буквой «а». Этой букве в столбце (А) соответствует число 2 приведенного выше шифра. При пересечении в табл. 1 строки 2 со столбцом «а» получим общую клетку, из которой выписываем численное значение силы P_1 . Для написанного шифра $P_1 = -12$ кН. Аналогично выписываются из таблиц численные значения остальных величин, необходимых для решения задач.

Задачи по теме растяжение – сжатие

Задача 1. Для стержня с прямой продольной осью (рис. 1) определить на каждом участке стержня нормальные силы N , нормальные напряжения σ , относительные деформации ε и перемещение поперечных сечений вдоль оси стержня δ . После этого построить эпюры $N, \sigma, \varepsilon, \delta$. Данные к задаче 1 взять в таблице 1. Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Задача 2. Для стержневой системы (рис. 2) определить нормальные напряжения в поперечных сечениях стержней и перемещение точки К. Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па. Данные к задаче 2 взять в таблице 2.

Задача 3. Стальной стержень (рис. 3), жёстко закреплённый левым концом и имеющий зазор Δ между правым торцом и неподатливой плоскостью, нагружен силами P_1 и P_2 и одновременно равномерно изменяется температура на Δt° С левой части 1 длиной l_3 или правой части 2 длиной $l_2 + l_1$. Построить эпюры N, σ, ε и перемещений поперечных сечений вдоль продольной оси стержня. Данные к задаче 3 взять из таблицы 3. Коэффициент температурного удлинения $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$.

Задача 4. Для расчетной схемы балки (рис. 4) написать выражения поперечных сил Q и изгибающих моментов M для каждого участка в общем виде и построить эпюры Q и M . Данные к задаче 4 взять в таблице 4.

Задача 5. Для расчетной схемы балки (рис. 5) написать выражения поперечных сил Q и изгибающих моментов M для каждого участка балки в общем виде и построить эпюры Q и M . Данные взять в таблице 5.

Задача 6. Для расчетной схемы балки (рис. 6) написать выражения поперечных сил Q и изгибающих моментов M для каждого участка в общем виде и построить эпюры Q и M . Для опасного поперечного сечения (рис. 6,а) определить максимальное нормальное напряжение σ по модулю и нормальное напряжение в точке К, координата которой Y_K . Затем построить эпюру распределения нормальных напряжений по высоте сечения. Данные взять в таблице 6.

Таблица 1

Цифры шифра	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	l_1 , см	l_2 , см	l_3 , см	$F_{1,2}$, см ²	$F_{2,2}$, см ²	$F_{3,2}$, см ²
1	11	21	-31	21	21	21	11	11	11
2	-12	-22	32	22	22	22	12	12	12
3	13	23	-33	23	23	23	13	13	13
4	-14	-24	34	24	24	24	14	14	14
5	15	25	-35	25	25	25	15	15	15
6	-16	-26	36	26	26	26	16	16	16
7	17	27	-37	27	27	27	17	17	17
8	-18	-28	38	28	28	28	18	18	18
9	19	29	-39	29	29	29	19	19	19
0	20	-30	40	30	30	30	20	20	20
	а	б	в	г	д	е	а	б	в

Таблица 2

Цифры шифра	Схема рис. 2	l_1 , м	l_2 , м	F_1 , см ²	F_2 , см ²	a , м	b , м	α	γ°	P , кН
1	I	1,0	1,0	5	5	0,5	0,8	0,2	10	10
2	II	1,2	1,2	6	6	0,6	0,9	0,3	15	20
3	III	1,4	1,4	7	7	0,7	1,0	0,4	20	30
4	IV	1,6	1,6	8	8	0,8	0,5	0,5	25	40
5	V	1,8	1,8	9	9	0,9	0,6	0,6	30	50
6	VI	2,0	2,0	10	10	1,0	0,7	0,7	35	15
7	VII	2,2	2,2	11	11	0,5	0,8	0,8	40	25
8	VIII	2,4	2,4	12	12	0,6	0,9	0,9	45	35
9	IX	2,6	2,6	13	13	0,7	1,0	0,2	20	45
0	X	2,8	2,8	14	14	0,8	1,2	0,3	25	55
	а	б	в	г	д	е	а	б	в	г

Таблица 3

Цифры шифра	Δ , мм	P_1 , кН	P_2 , кН	l_1 , см	l_2 , см	l_3 , см	$F_{1,2}$, см ²	F_2 , см ²	Δt° С	№ части стержня
1	0,10	30	11	21	21	21	11	11	10	1
2	0,12	35	-12	22	22	22	12	12	20	2
3	0,15	40	13	23	23	23	13	13	30	1
4	0,20	45	-14	24	24	24	14	14	40	2
5	0,22	50	15	25	25	25	15	15	50	1
6	0,25	55	-16	26	26	26	6	6	10	2
7	0,27	60	17	27	27	27	7	7	20	1
8	0,30	65	-18	28	28	28	8	8	30	2
9	0,32	70	19	29	29	29	9	9	40	1
0	0,35	75	-20	30	30	30	10	10	50	2
	а	б	в	г	д	е	а	б	в	Г

Таблица 4

Цифры шифра	q кН/м	P кН	m кНм	l ₁ м	l ₂ м	l ₃ м
1	3	2	2	0	6	1
2	-2	4	-3	1	5	2
3	1	-3	4	2	4	3
4	-4	-5	-5	3	1	4
5	5	6	6	4	3	5
6	-6	-7	-7	5	2	6
7	7	8	8	6	1	5
8	-8	-9	-9	0	0	4
9	9	-1	10	1	1	2
0	-10	10	-12	2	2	1
	а	б	в	г	д	е

Таблица 5

Цифры шифра	P ₁ кН	P ₂ кН	q кН/м	l ₁ м	l ₂ м	l ₃ м	l ₄ м
1	1	1	1	0	1	1	1
2	-2	-2	2	1	2	2	2
3	3	3	3	2	3	3	3
4	-4	-4	4	3	4	4	4
5	5	5	5	4	5	5	5
6	-6	-6	1	5	6	6	6
7	7	7	2	6	7	7	7
8	-8	-8	3	7	8	8	8
9	9	9	4	8	9	9	9
0	10	10	5	9	10	5	5
	а	б	в	г	д	е	а

Таблица 6

Цифры шифра	q кН/м	P кН	m кНм	l ₁ , м	l ₂ , м	l ₃ , м	l ₄ , м	Схема сечения	h	t, см	Y _к , см
1	-1	1	-2	0	6	2	0	I	6t	1,0	1,6
2	2	-2	4	1	7	9	2	II	8t	1,2	1,7
3	-3	3	-6	2	8	8	3	III	10t	1,3	1,8
4	4	-4	8	3	9	7	4	IV	12t	1,4	1,9
5	-5	5	-10	4	10	6	5	V	14t	1,5	2,0
6	1	-6	2	0	6	5	6	VI	6t	1,6	2,1
7	-2	7	-4	1	7	4	7	VII	8t	1,7	2,2
8	3	-8	6	2	8	3	8	VIII	10t	1,8	2,3
9	-4	9	-8	3	9	2	9	IX	12	1,9	2,4
0	5	-10	10	4	10	1	10	X	14t	2,0	2,5
	а	б	в	г	д	е	а	б	в	г	д

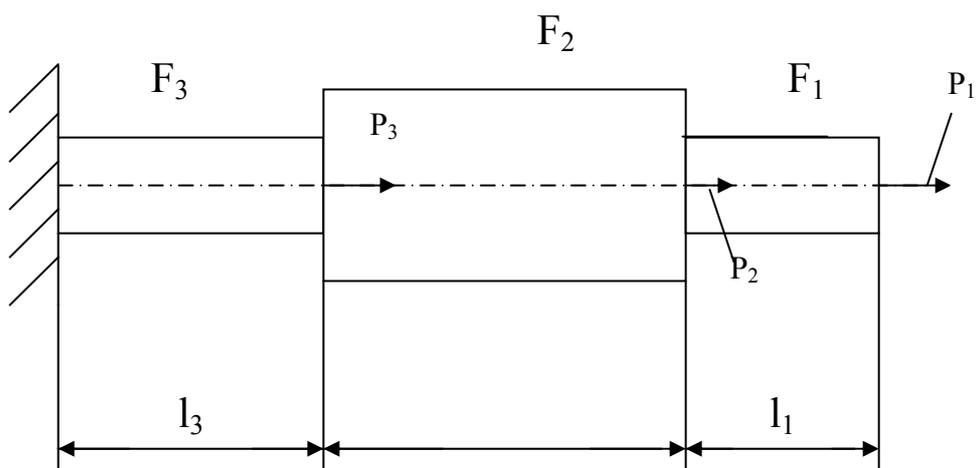


Рис. 1

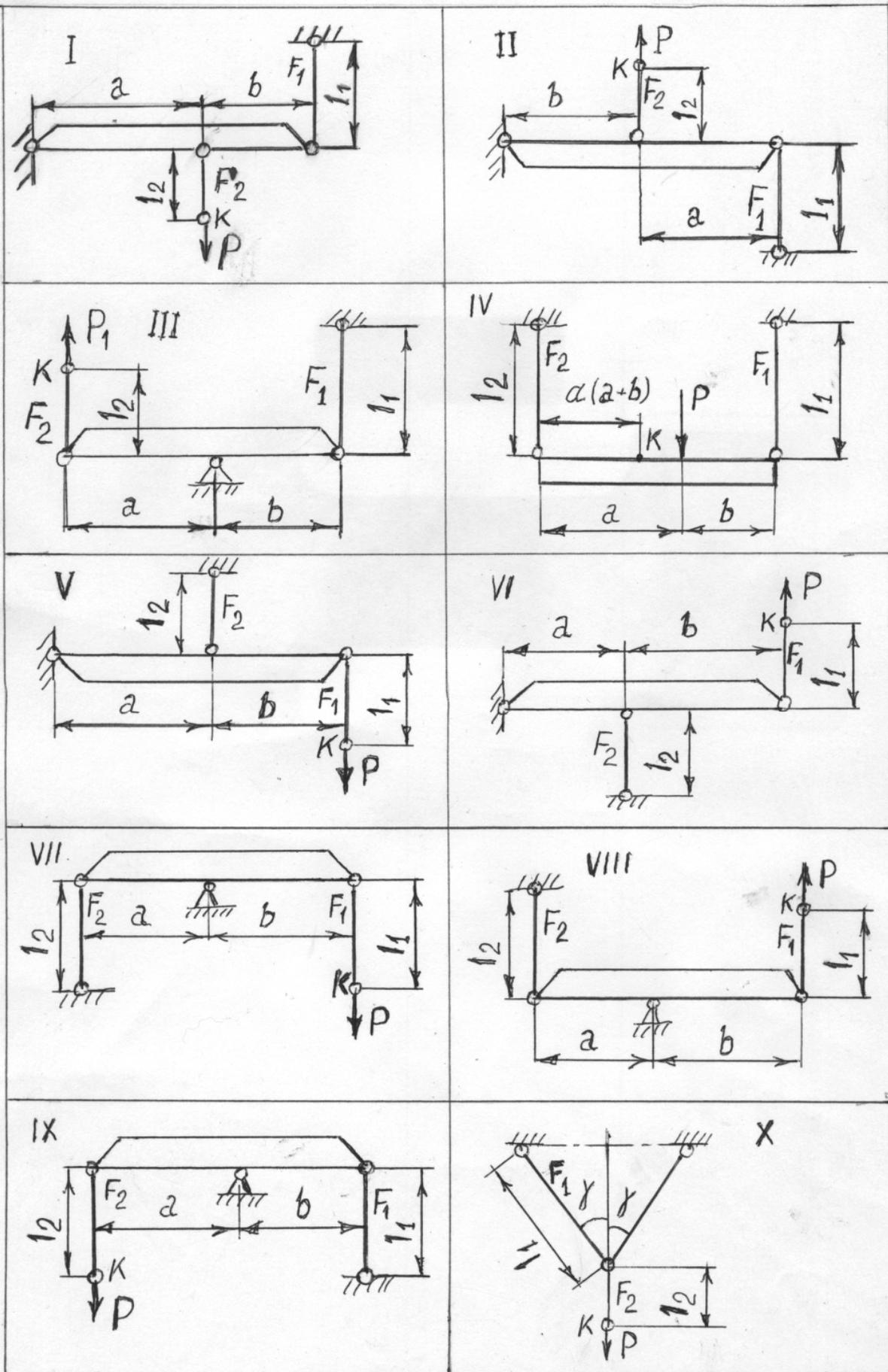


Рис. 2

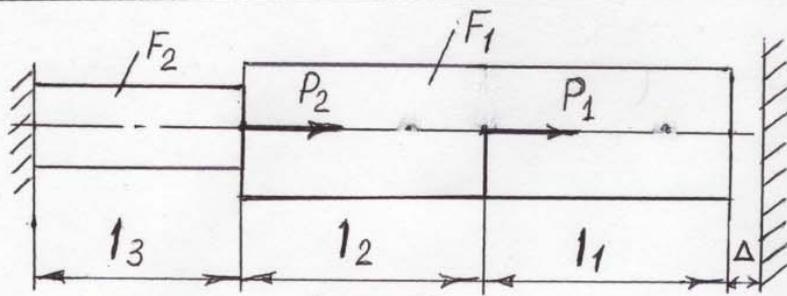


Рис. 3

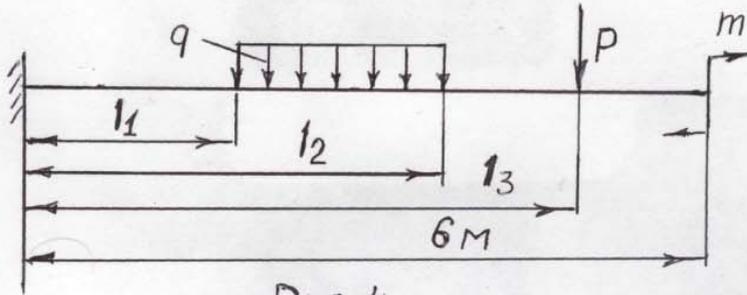


Рис. 4

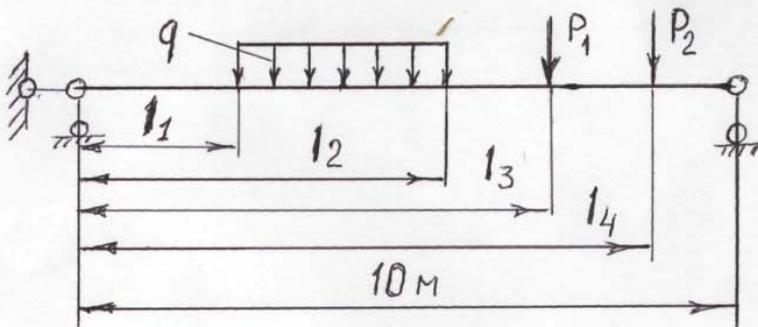


Рис. 5

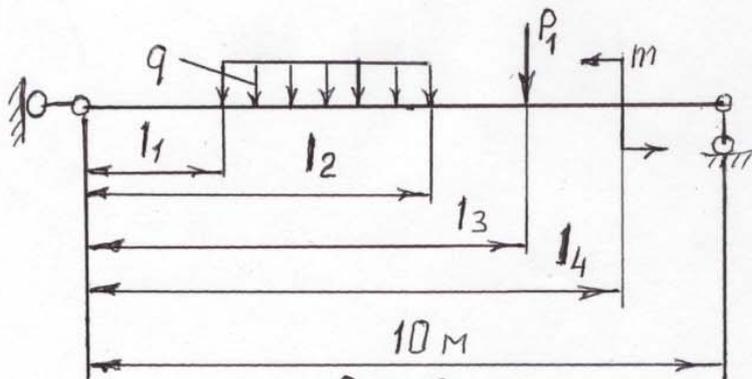


Рис. 6

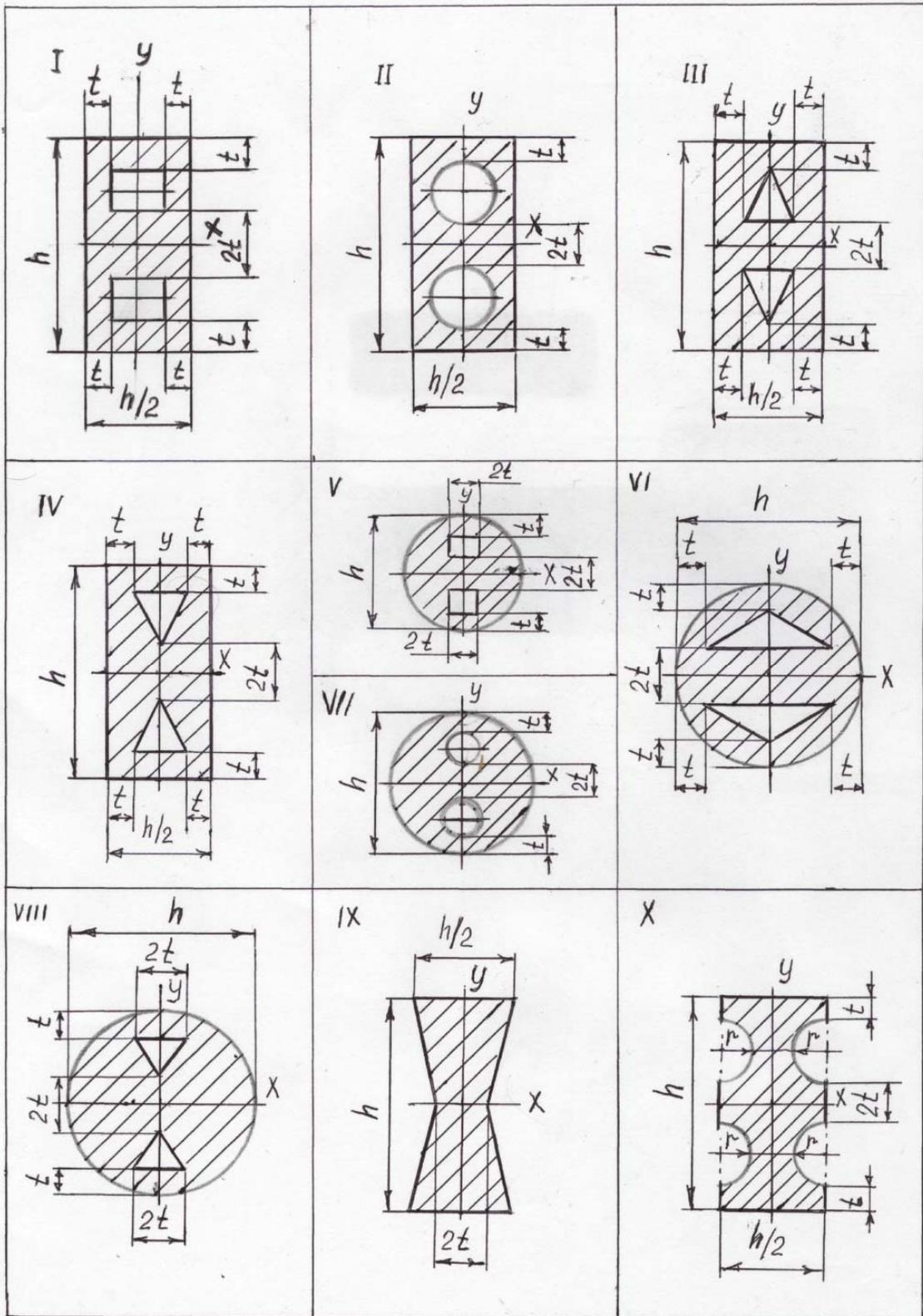


Рис. 6, а

Примеры выполнения заданий

Расчетно-проектировочная работа 1

Задача 1. Из таблицы 1 выписываем исходные данные согласно шифру. Примем для задачи 1 шифр 245480. Каждому студенту будет выдан свой шифр. Итак, $P_1 = -12$ кН, $P_2 = -24$ кН, $P_3 = -35$ кН, $l_1 = 24$ см, $l_2 = 28$ см, $l_3 = 30$ см, $F_1 = 12$ см², $F_2 = 14$ см², $F_3 = 15$ см². Согласно этих данных строим расчетную схему стержня (рис. 7,а). Если численное значение продольной силы, выписанное из таблицы 1, будет иметь знак минус, как в этом примере, то эту силу нужно направить противоположно указанному на рис. 1 и в дальнейшем эту силу считать положительной. Так нужно поступать и при решении других задач.

1. Определение нормальных сил. Вначале определим реакцию R_A . Составим уравнение равновесия

$$\sum Z = 0, -P_1 - P_2 - P_3 + R_A = 0, \quad R_A = P_1 + P_2 + P_3 = 12 + 24 + 35 = 71 \text{ кН.}$$

Нормальные силы в поперечных сечениях стержня определяют методом сечений, который заключается в том, что стержень мысленно рассекают плоскостью, перпендикулярной оси стержня, на две части и записывают уравнение равновесия любой из двух частей. Вначале стержень разбивают на участки. Длина участка при определении нормальных сил есть расстояние между точками приложения двух соседних продольных сил или свободным торцом стержня и точкой приложения ближайшей силы. Изображенный на рис. 7, а стержень имеет три участка. Мысленно рассекают стержень на длине первого участка поперечным сечением 1-1 на две части и рассматривают равновесие одной из частей. Обычно для уменьшения объема вычислений рассматривают равновесие той части, на которую действует меньше сил. Однако получают тот же результат, если рассматривают равновесие второй части. В этой задаче рассмотрим равновесие правой (относительно сечения 1-1) части, изобразив её отдельно (рис. 7,б). Действие левой части на правую заменим нормальной силой N_1 . Условимся и в дальнейшем нормальную силу считать растягивающей, т.е. направлять её от сечения. Если нормальная сила в ответе имеет знак минус, то участок испытывает сжатие, а если знак плюс, то участок растянут. Составим условие равновесия участка стержня (рис. 7, б). $\sum Z = 0, -N_1 - P_1 = 0, N_1 = -P_1 = -12$ кН. Проведя сечения 2-2 и 3-3 сможем найти N_2 и N_3 . При этом нет необходимости изображать отдельно отсеченные части – они видны на расчетной схеме стержня. Итак, $-N_2 - P_2 - P_1 = 0, N_2 = -P_2 - P_1 = -24 - 12 = -36$ кН и $-N_3 - P_3 - P_2 - P_1 = 0, N_3 = -P_3 - P_2 - P_1 = -35 - 24 - 12 = -71$ кН. Рассматривая равновесие левой части относительно сечения 3-3, найдем, что $R_A + N_3 = 0$ и $N_3 = -R_A = -71$ кН. Получили тот же результат, что и при рассмотрении равновесия правой части.

Найдя нормальные силы, построим график изменения нормальной силы вдоль продольной оси стержня. Этот график называют эпюрой.

Для построения эпюры проводим базисную линию параллельную продольной оси стержня. Положительные значения нормальной силы откладываем вверх, отрицательные вниз. Поскольку нормальная сила на длине участка постоянна, то графиком будет прямая линия, параллельная базисной линии и отстоящая от нее на величину равную численному значению нормальной силы с учетом масштаба (рис. 7,в). Затем принято построенную эпюру штриховать линиями, перпендикуляр-

ными базисной линии и ставить соответствующий знак нормальной силы в кружочке, а у характерных ординат ставить численные значения нормальной силы. Аналогичные эпюры можно построить и для других переменных величин.

2. Определение нормальных напряжений. Нормальные напряжения определяют по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

$$\text{Тогда } \sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{-12000}{0,0012} = -10 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-36000}{0,0014} = -25,7 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{-71000}{0,0015} = -47,3 \text{ МПа}. \text{ Эпюра нормальных напряжений изображена на}$$

рис. 7,г.

3. Определение относительных деформаций. Относительные деформации определяют по формуле

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\text{Тогда } \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{-10 * 10^6}{2 * 10^{11}} = -5 * 10^{-5}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{-25,7 * 10^6}{2 * 10^{11}} = -12,85 * 10^{-5},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} = \frac{-47,3 * 10^6}{2 * 10^{11}} = -23,65 * 10^{-5}.$$

Эпюра относительных деформаций изображена на рис. 7,д.

4. Определение перемещений поперечных сечений. Поскольку в данном примере ε на участках стержня величина постоянная, то продольные перемещения поперечных сечений можно определять по формуле

$$\delta = \sum \varepsilon_i z_i,$$

где ε_i – относительная продольная деформация на соответствующем участке стержня,

z_i – координата сечения с началом отсчета на каждом участке в его начале.

Очевидно, что перемещение сечения а-а (рис. 7,а) равно нулю. Перемещение сечения b-b равно

$$\delta_{b-b} = \varepsilon_3 l_3 = -23,65 * 10^{-5} * 0,3 = -7,1 * 10^{-5} \text{ м}.$$

Сечение с-с переместится на величину

$$\delta_{c-c} = \varepsilon_3 l_3 + \varepsilon_2 l_2 = -7,1 * 10^{-5} - 12,85 * 10^{-5} * 0,28 = -10,7 * 10^{-5} \text{ м}.$$

Укорочение всего стержня равно

$$\delta_{d-d} = \varepsilon_3 l_3 + \varepsilon_2 l_2 + \varepsilon_1 l_1 = -10,7 * 10^{-5} - 5 * 10^{-5} * 0,24 = -11,9 * 10^{-5} \text{ м}.$$

Эпюра продольных перемещений показана на рис. 7,е.

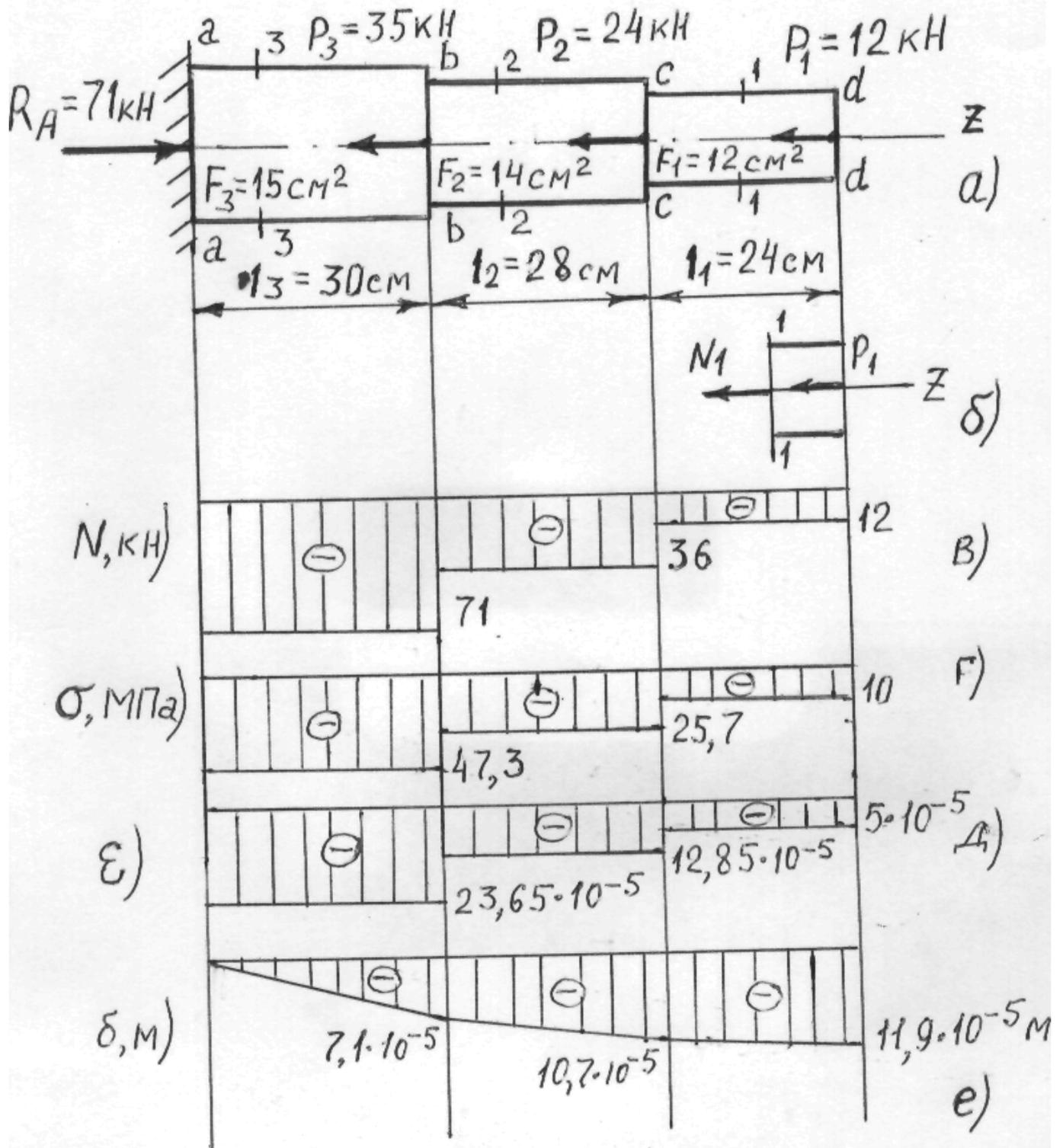
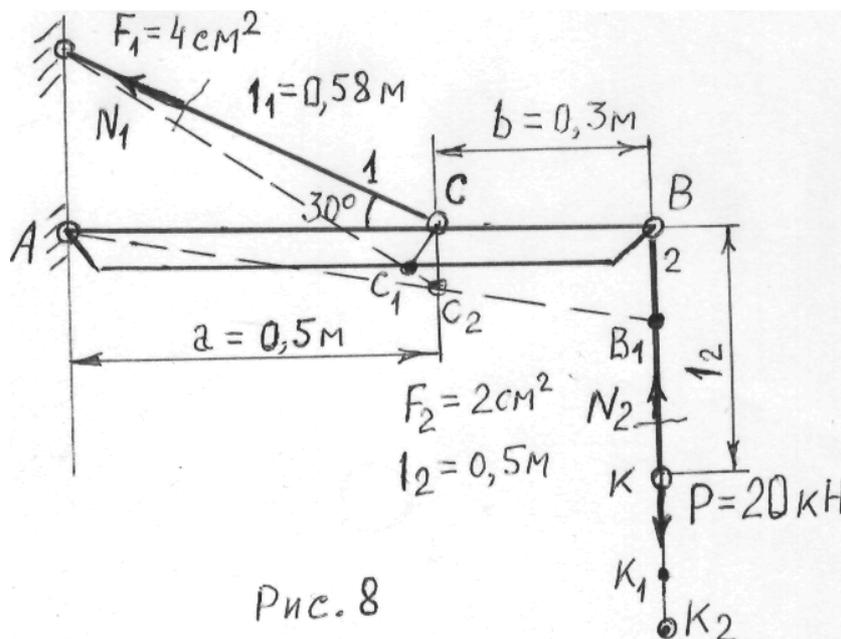


Рис. 7

Задача 2. Изобразим расчетную схему стержневой системы (рис. 8). Исходные данные указаны на схеме.



1. Определение нормальных сил в поперечных сечениях стержней 1 и 2. Рассечем стержень 2 поперечным сечением и укажем нормальную силу N_2 . Составив уравнение равновесия нижней части, найдем N_2 .

$$N_2 - P = 0, \quad N_2 = P = 20 \text{ кН.}$$

Далее рассечем стержень 1 поперечным сечением и укажем нормальную силу N_1 . Составив уравнение равновесия бруса АВ, найдем N_1 .

$$\sum M_A = 0, \quad N_1 \cos 60^\circ \cdot a - P(a + b) = 0,$$

откуда

$$N_1 = \frac{P(a + b)}{\cos 60^\circ \cdot a} = \frac{20(0.5 + 0.3)}{0.5 \cdot 0.5} = 64 \text{ кН.}$$

2. Определение нормальных напряжений.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{64000}{4 \cdot 10^{-4}} = 160 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{20000}{2 \cdot 10^{-4}} = 100 \text{ МПа.}$$

3. Определение перемещения точки К. Абсолютно жесткий брус АВ может перемещаться как жесткое целое, его деформация мала и ей пренебрегаем. При действии силы Р брус АВ займет новое положение AC_2B_1 . Угол поворота бруса АВ показан увеличенным для наглядности изображения. Этот угол мал и поэтому считаем, что точки С и В перемещаются по линиям перпендикулярным стороне АВ бруса. Точки С, В, К займут новое положение C_2, B_1, K_2 . Проводя перпендикуляр из точки С к новому положению стержня 1, получим точку C_1 . Тогда $C_1C_2 = \Delta l_1$ и $C_2C_1 = C_2C_1 / \cos 30^\circ = \Delta l_1 / \cos 30^\circ$. Из подобия треугольников ACC_2 и ABB_1 найдем перемещение точки В.

$$\frac{BB_1}{CC_2} = \frac{(a+b)}{a}, \text{ откуда } BB_1 = \frac{CC_2(a+b)}{a} = \frac{\Delta l_1(a+b)}{a \cos 30} = \frac{N_1 l_1(a+b)}{EF_1 a \cos 30} =$$

$$= \frac{64000 * 0,58(0,5 + 0,3)}{2 * 10^{11} * 4 * 10^{-4} * 0,5 * 0,866} = 8,57 * 10^{-4} \text{ м.}$$

Перемещение точки К состоит из двух отрезков:

$$KK_1 = BB_1 \text{ и } K_1K_2 = \Delta l_2.$$

Тогда

$$\delta_K = KK_2 = KK_1 + K_1K_2 = BB_1 + \Delta l_2 = BB_1 + \frac{N_2 l_2}{EF_2} = 8,57 * 10^{-4} + \frac{20000 * 0,5}{2 * 10^{11} * 2 * 10^{-4}} =$$

$$8,57 * 10^{-4} + 2,5 * 10^{-4} = 11,07 * 10^{-4} \text{ м} = 1,107 \text{ мм.}$$

Задача 3.

1. Определение реакций R_A и R_B . Изобразим расчетную схему стержня (рис. 9,а). Исходные данные приведены на расчетной схеме согласно шифру 245480. Стержень нагружен силами P_1 и P_2 и одновременно изменяется температура части стержня длиной $(l_2 + l_1)$. Эта часть стержня нагревается на 50°C .

Укажем реакции R_A и R_B , считая, что зазор Δ при действии сил и тепловом воздействии перекроется. Составим уравнение равновесия стержня.

$$\sum Z = 0, -R_A - P_2 + P_1 - R_B = 0, \quad -R_A - 14 + 35 - R_B = 0,$$

$$-R_A + 21 - R_B = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) одно, а неизвестных в нем два. Задачу, в которой внутренние усилия и реакции в опорах не могут быть найдены помощью уравнений равновесия, называют статически неопределимой.

Для решения такой задачи необходимо к уравнению равновесия добавить уравнение, вытекающее из условия деформации стержня. В данной схеме стержень под действием сил и изменения температуры сможет увеличить свою длину на величину зазора Δ . Запишем это уравнение.

$$-\frac{P_2 l_3}{EF_2} + \frac{P_1 l_3}{EF_2} + \frac{P_1 l_2}{EF_1} + \alpha \Delta t (l_2 + l_1) - \frac{R_B l_3}{EF_2} - \frac{R_B (l_1 + l_2)}{EF_1} = \Delta. \quad (2)$$

Из уравнения (2) найдем R_B , а из уравнения (1) найдем R_A . После этого задача становится статически определимой и может быть решена с применением уравнений равновесия.

Заменяем в уравнении (2) буквенные обозначения числами.

$$-\frac{14000 * 0,28}{12 * 10^{-4}} + \frac{35000 * 0,28}{12 * 10^{-4}} + \frac{35000 * 0,24}{10 * 10^{-4}} + 125 * 10^{-7} * 50(0,24 + 0,25) 2 * 10^{11} -$$

$$-\frac{R_B * 0,28}{12 * 10^{-4}} - \frac{R_B (0,25 + 0,24)}{10 * 10^{-4}} = 0,2 * 10^{-3} * 2 * 10^{11}.$$

Откуда $R_B = 48 \text{ кН}$.

Повторим уравнение (1). $-R_A + 21 - 48 = 0, \quad R_A = -27 \text{ кН}$.

Знак минус в ответе указывает, что реакция R_A направлена противоположно, изображенной на схеме.

2. Определение нормальных сил. Проведем сечения 1-1, 2-2 и 3-3 и найдем нормальные силы.

$$N_1 = -R_B = 48 \text{ кН. } N_2 = -R_B + P_1 = -48 + 35 = -13 \text{ кН.}$$

$$N_3 = -R_B + P_1 - P_2 = -48 + 35 - 14 = -27 \text{ кН.}$$

Построим эпюру нормальных сил N (рис. 9,б).

3. Определение нормальных напряжений.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{-48000}{10 \cdot 10^{-4}} = -48 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-13000}{10 \cdot 10^{-4}} = -13 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_2} = \frac{-27000}{12 \cdot 10^{-4}} = -22,5 \text{ МПа.}$$

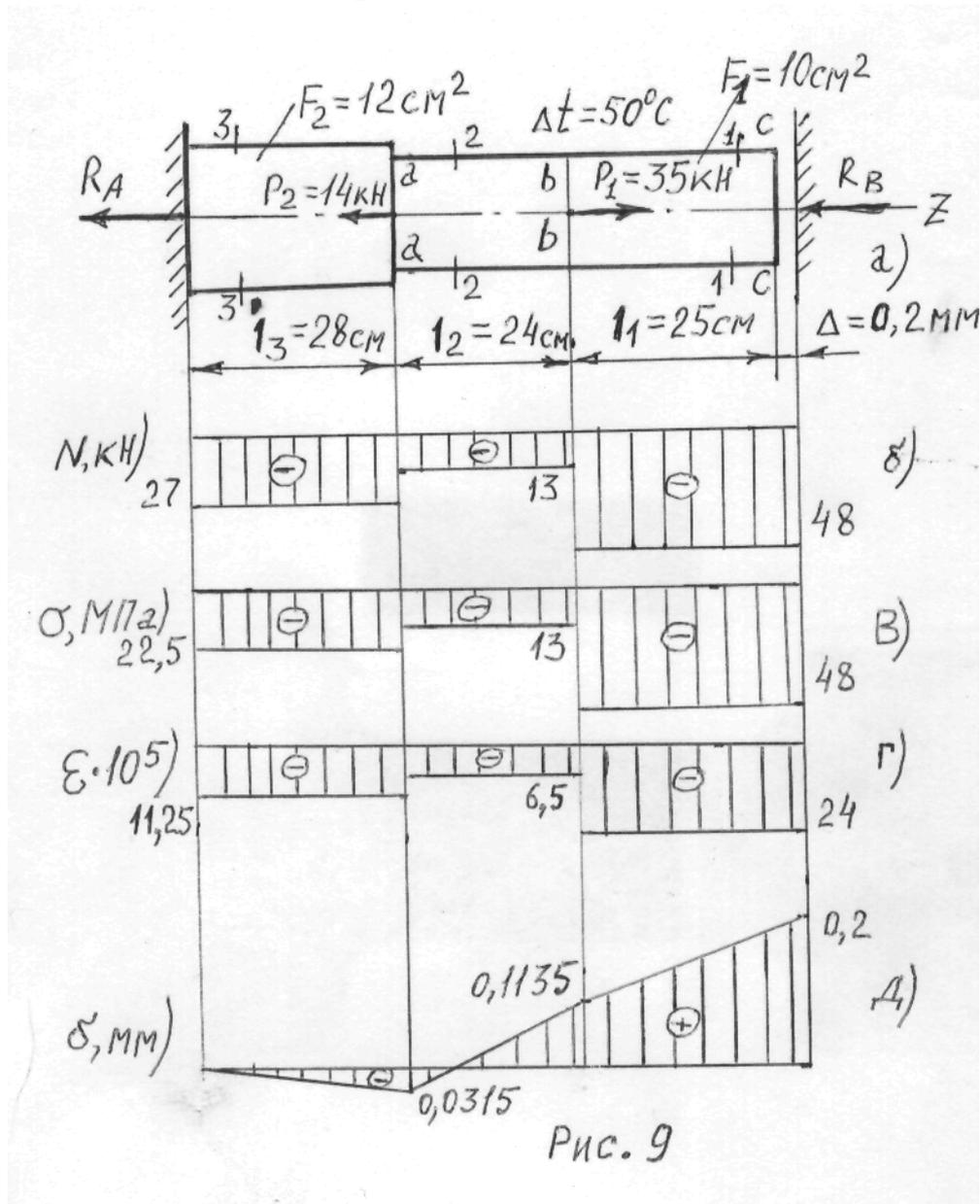


Рис. 9

Эпюра нормальных напряжений построена на рис. 9,в.

4. Определение относительных продольных деформаций.

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = -\frac{48 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11}} = -24 \cdot 10^{-5}, \quad \epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = -\frac{13 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11}} = -6,5 \cdot 10^{-5},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} = -\frac{22,5 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11}} = -11,25 \cdot 10^{-5}.$$

Эпюра ε представлена на рис. 9,г.

5. Определение перемещений поперечных сечений .

$$\delta_{a-a} = \varepsilon_3 l_3 = -11,25 \cdot 10^{-5} \cdot 0,28 = -3,15 \cdot 10^{-5} \text{ м} = -0,0315 \text{ мм}.$$

$$\delta_{b-b} = \delta_{a-a} + \varepsilon_2 l_2 + \alpha \Delta t l_2 = -3,15 \cdot 10^{-5} - 6,5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,24 + \\ + 125 \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 0,24 = 0,1029 \text{ мм}.$$

$$\delta_{c-c} = \delta_{b-b} + \varepsilon_1 l_1 + \alpha \Delta t l_1 = 10,29 \cdot 10^{-5} - 24 \cdot 10^{-5} \cdot 0,25 + \\ + 125 \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 0,25 = 0,1992 \text{ мм} \approx 0,2 \text{ мм}.$$

Эпюра перемещений поперечных сечений представлена на рис. 9,д.

Расчетно-проектировочная работа 2

Задача 6. Изобразим расчетную схему балки (рис. 10,а). Исходные данные приведены на расчетной схеме согласно шифру 245480. Укажем предполагаемое направление реакций R_A и R_B и определим их, составив уравнения равновесия.

$$\sum M_B = 0, \quad R_A \cdot 10 - P \cdot 9 - m - q \cdot 5 \cdot 4,5 = 0, \quad 10R_A - 4 \cdot 9 - 9 - 2 \cdot 5 \cdot 4,5 = 0, \quad R_A = 9 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = 0, \quad R_B \cdot 10 - q \cdot 5 \cdot 5,5 + m - P \cdot 1 = 0, \quad 10R_B - 2 \cdot 5 \cdot 5,5 + 9 - 4 \cdot 1 = 0, \quad R_B = 5 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка реакций. } \sum Y = 0, \quad R_A - P - q \cdot 5 + R_B = 0, \quad 9 - 4 - 2 \cdot 5 + 5 = 0, \quad 14 - 14 = 0.$$

Реакции найдены правильно. После этого на схеме проставляем численные значения реакций.

Переходим к записи выражений поперечных сил Q и изгибающих моментов M , а затем к построению эпюр Q и M .

Вначале разобьем балку на участки. На границе участков приложены сосредоточенные силы P , сосредоточенные моменты m , начинается или обрывается распределенная нагрузка q . Так на балке (рис. 10,а) имеется 5 участков. Для записи выражений поперечных сил Q необходимо провести поперечное сечение (например, на участке 1 проведем сечение 1-1 на расстоянии Z от точки A) и записать алгебраическую сумму проекций сил, приложенных на длине Z , на ось Y . Следовательно, $Q_1 = -R_A$.

Проведя сечение 2-2, сможем записать: $Q_2 = R_A - P$. Проведя сечение 3-3, видим, что $Q_3 = R_A - P$ (момент m в сумму сил не входит). При записи Q для первых трех участков рассматривали левую часть балки. Можно рассматривать и правую часть, результат будет такой же. Поэтому нужно рассматривать ту часть балки, на которой расположено меньше силовых факторов. Проведя сечения 4-4 и 5-5, будем при записи выражений Q_4 и Q_5 рассматривать правые относительно сечений 4-4 и 5-5 части балки. Тогда $Q_5 = -R_B$ и $Q_4 = -R_B + q(z-2)$. Выражение $q(z-2)$ представляет равнодействующую распределенной нагрузки q , действующей на длине $(z-2)$. Эта равнодействующая $R = q(z-2)$ приложена в середине длины отрезка $(z-2)$. Поскольку поперечная сила Q равна алгебраической сумме проекций сил на ось Y , то необходимо ввести правило знака Q . Он определяется по схеме перекося элемента балки (рис. 11). Например, $Q_2 = R_A - P$ (рис. 10,а). R_A действует по левой грани, а $Q_2(R_A)$ действует по правой грани (рис. 12,а). Аналогичная картина при действии силы P и $Q_2(P)$ (рис. 12,б).

Переходим к определению изгибающего момента M . Изгибающий момент в поперечном сечении равен алгебраической сумме моментов сил, в том числе и сосредоточенных моментов m , расположенных на длине z относительно оси x , проходящей через центр тяжести сечения перпендикулярно силовой плоскости. На схеме (рис. 10,а) ось x проецируется в точку C сечения 1-1, относительно этой точки и надо составлять алгебраическую сумму моментов сил. Так, на первом участке изгибающий момент M_1 равен $M_1=R_A z$, на втором $M_2=R_A z - P(z-1)$.

Знак изгибающего момента связывают со знаком кривизны изогнутой балки. Балка под действием сил изгибается выпуклостью вверх или вниз. На рис. 13 показаны две части балки изогнутые выпуклостью одна вниз, а другая вверх. Для первой части балки кривизна кривой положительна и изгибающий момент положителен, а для второй кривизна отрицательна и изгибающий момент отрицателен. Чтобы определить, как изгибается часть балки от каждого силового фактора, необходимо изобразить следующее. Например, при действии реакции R_A изгибающий момент, как уже записано выше, равен $M_1 = R_A z$, момент положителен. Мысленно сечение 1-1 жестко защемляем (рис. 14), убираем опору в точке A , оставив реакцию R_A . Под действием силы R_A точка A переместится вверх и тогда часть балки изогнется выпуклостью вниз. Как видим, кривизна кривой положительна и изгибающий момент положителен. На рис. 15 показано пунктиром новое положение части балки под действием силы P (рис. 15,а) и момента m (рис. 15,б). В обоих случаях кривизна кривой отрицательна и изгибающий момент отрицателен. При решении задач нет необходимости изображать рис. 14 и 15. Их мысленно можно представить на схеме (рис. 10,а).

Запишем выражения изгибающих моментов для сечений 3-3, 4-4 и 5-5.

$$M_3 = R_A z - P(z-1) - m, \quad M_5 = R_B z,$$

$$M_4 = R_B z - R \cdot 0,5(z-2) = R_B z - q(z-2) \cdot 0,5(z-2) = R_B z - q \cdot 0,5(z-2)^2.$$

Найдя выражения Q и M на всех участках, можно построить графики уравнений Q и M . Если в уравнениях Q и M переменная z в первой степени, то графиком является прямая линия. Прямую линию можно построить по двум точкам. Поэтому найдем численные значения Q и M в начале и конце каждого участка. Результаты записи Q и M и их численные значения поместим в таблицу 7. Графиком уравнения M_4 является кривая. Для построения этой кривой необходимо знать третье значение M_4 , которое найдем при той z_4 , при которой $Q_4 = 0$.

$$Q_4 = -R_B + q(z_4 - 2) = 0, \quad -5 + 2(z_4 - 2) = 0 \quad \text{откуда} \quad z_4 = 4,5 \text{ м.}$$

$$M_4 = R_B z_4 - q \frac{(z_4 - 2)^2}{2} = 5 \cdot 4,5 - 2 \frac{(4,5 - 2)^2}{2} = 16,25 \text{ кНм.}$$

При построении графиков M в литературе для строительных специальностей принято положительные значения изгибающих моментов откладывать вниз от базисной линии.

Графики Q и M построены на (рис. 10,б,в). Эти графики называются эпюрами Q и M соответственно. Принято эпюры штриховать линиями, перпендикулярными базисной линии. Кроме того, у характерных ординат указывать их численные значения и в кружочке ставить знак усилия. Характерные ординаты – это такие ординаты, отложив которые, можно построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

№ участка	Изменение Z , м	$Q(Z)$, кН	$M(Z)$, кНм
1	$0 \leq Z \leq 1$	$Q_1 = R_A$	$M_1 = R_A z$
2	$1 \leq Z \leq 2$	$Q_2 = R_A - P$	$M_2 = R_A z - P(z-1)$
3	$2 \leq Z \leq 3$	$Q_3 = R_A - P$	$M_3 = R_A z - P(z-1) - m$
4	$2 \leq Z \leq 7$	$Q_4 = R_B + q(z-2)$	$M_4 = R_B z - q(z-2)^2/2$
5	$0 \leq Z \leq 2$	$Q_5 = R_B$	$M_5 = R_B z$
1	$Z=0$	9	0
	$Z=1$	9	9
2	$Z=1$	5	9
	$Z=2$	5	14
3	$Z=2$	5	5
	$Z=3$	5	10
4	$Z=2$	-5	10
	$Z=7$	5	10
5	$Z=0$	-5	0
	$Z=2$	-5	10

Дифференциальные зависимости $q = dQ/dz$, $Q = dM/dz$ и $q = d^2M/dz^2$ позволяют установить правила проверки эпюр Q и M .

Применим их к рассмотренному выше примеру.

1. При $q > 0$ Q возрастает, а при $q < 0$ (в нашем примере q направлен против оси Y и $q < 0$) Q убывает. Линия ДТ идет вниз. На участках, где $q = 0$ Q постоянна – графики параллельны базисной линии.

2. В сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре Q имеется скачок на величину этой силы в ее направлении, а на эпюре M имеется перелом. Соответственно этому на эпюре Q скачок отражен отрезком ФК, численно равным с учетом масштаба силе $P = 9 - 5 = 4$ кН. Аналогичные скачки имеются в точках А и В. Для сечения левее точки А $Q = 0$, а правее $Q_1 = 9$ кН, скачок с нуля до 9 кН. Как видим в точке А действует реакция $R_A = 9$ кН. В точке В скачок с -5 кН до нуля, который равен реакции $R_B = 5$ кН. Как уже упоминалось на эпюре M в точке имеется перелом – продолжение линии ОЕ не совпадает по направлению с линией ЕГ.

3. В сечениях, где $Q > 0$ изгибающий момент M возрастает, а при $Q < 0$ M убывает. Это наглядно видно, если мысленно совместить эпюры Q и M .

4. В сечении, где $Q = 0$ и при этом, если Q меняет знак с плюса на минус, M_{\max} , что хорошо видно на эпюрах рассматриваемого примера. В сечении, где $Q = 0$ и меняет знак с минуса на плюс, M_{\min} .

5. В сечении балки, где приложен сосредоточенный момент m , на эпюре M имеется скачок на величину этого момента. В нашем примере отрезок $GL = 14 - 5 = 9$ кН.

6. На участках балки, где $q = 0$ эпюра Q очерчена прямыми линиями параллельными базисной линии, а эпюра M – наклонными прямыми линиями. На участке, где приложена равномерно-распределенная нагрузка q эпюра Q очерчена наклонной линией, направленной в сторону действия нагрузки q , если смотреть слева направо

по чертежу, а эпюра М очерчена кривой, выпуклость которой направлена в сторону действия нагрузки q . Это правило полностью иллюстрируется в данном примере. Если проверка эпюр Q и M выполняется, то можно считать, что эпюры построены правильно.

Переходим к определению нормальных напряжений в поперечном сечении. Нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения при прямом изгибе определяют по формуле

$$\sigma = \frac{M}{J_X} Y,$$

где M – изгибающий момент в сечении, J_X – осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси X , Y – расстояние от нейтральной оси X до точки, в которой определяют напряжение.

В начале найдем J_X поперечного сечения (рис. 16). Момент инерции поперечного сечения найдем, как момент инерции прямоугольника АВДЕ за вычетом учетверенного момента инерции треугольника МДФ, поскольку прямоугольник имеет четыре одинаковые не заштрихованные треугольника, один из которых обозначен буквами МДФ. Тогда

$$J_X = J_X^{np} - 4(J_{X_1}^{TP} + F_{TP}a^2),$$

где J_X^{np} – момент инерции прямоугольника АВДЕ относительно оси X , $J_{X_1}^{TP}$ – момент инерции треугольника МДФ относительно оси X_1 , F_{TP} – площадь треугольника МДФ, a – расстояние между осями X и X_1 .

Продолжим последнее уравнение

$$J_X = \frac{bh^3}{12} - 4\left(\frac{tL^3}{36} + \frac{1}{2}tL\frac{4}{9}L^2\right) = \frac{10 \cdot 12^3}{12} - 4\left(\frac{2 \cdot 6^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{4}{9} \cdot 6^2\right) = 1008 \text{ см}^4.$$

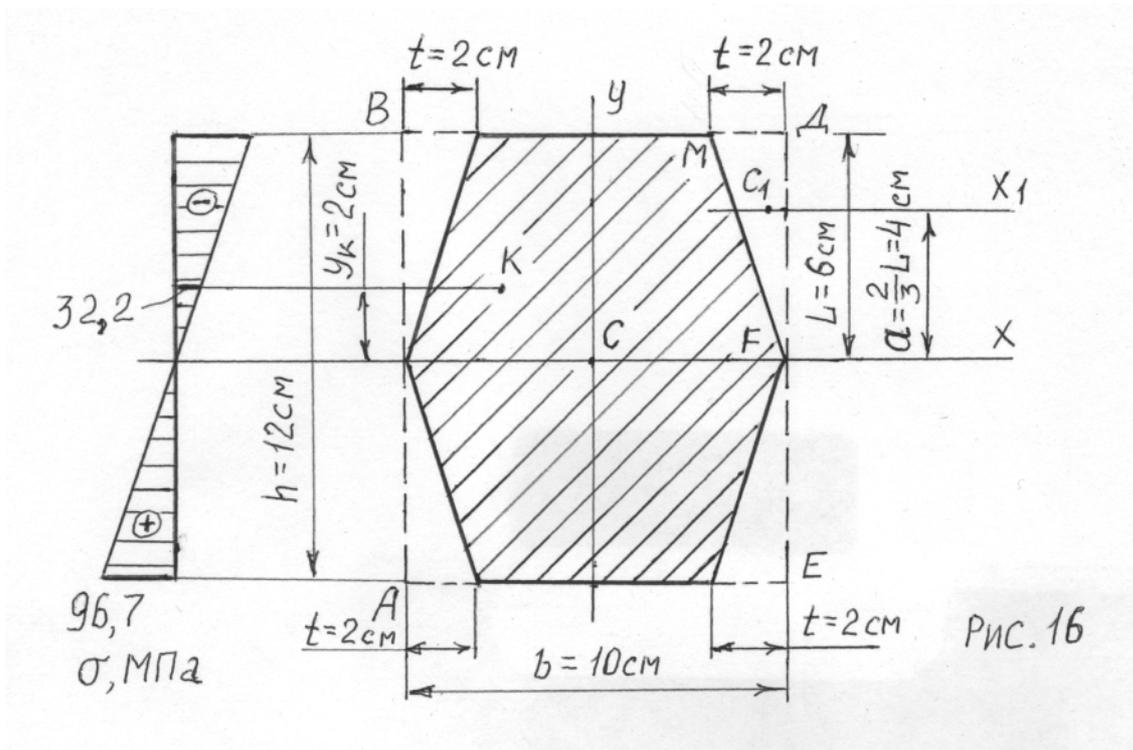
Нормальные напряжения необходимо найти для опасного сечения, а это сечение в котором действует максимальный (по модулю, при равных допускаемых напряжениях на растяжение и сжатие) изгибающий момент. Согласно эпюре М $M_{\max} = 16,25$ кНм. Максимальное нормальное напряжение действует в наиболее удаленной точке от нейтральной оси.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J_X} Y_{\max} = \frac{16,25 \cdot 10^3}{1008 \cdot 10^{-8}} \cdot 6 \cdot 10^2 = 96,7 \text{ МПа}.$$

Нормальное напряжение в точке К равно

$$\sigma_K = \frac{M_{\max}}{J_X} Y_K = \frac{16,25 \cdot 10^3}{1008 \cdot 10^{-8}} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 32,2 \text{ МПа}.$$

Слева от сечения (рис. 16) построена эпюра распределения нормальных напряжений по высоте сечения. На эпюре М ординаты отложены со стороны растянутых волокон балки, поэтому на эпюре σ поставлен внизу знак плюс (нижние волокна растянуты), а на верху поставлен знак минус (верхние волокна сжаты).



При оформлении расчётно-проектировочной работы придерживаться оформления рассмотренных здесь задач.