

## ПРИМЕР РАСЧЕТА ПЛОСКОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ

Для заданной расчетной схемы рамы (рисунок 1) требуется: построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, выполнить необходимые проверки; определить угол поворота жестко узла рамы и вертикальное перемещение точки приложения силы  $F$ .

Исходные данные: нагрузки  $F = 6$  кН,  $q = 36$  кН/м; длины стержней рамы  $l = 4$  м, угол  $\alpha = 25^\circ$ ; жесткость  $EJ = 10^7$  Н · м<sup>2</sup>.

**Степень статической неопределенности.** Правую шарнирно-неподвижную опору рамы изобразим в виде шарнира (рисунок 2). Вычислим степень статической неопределенности:

$$s = 3K - III = 3 \cdot 1 - 1 = 2.$$

Здесь  $K = 1$  – число замкнутых контуров,  $III = 1$  – количество простых шарниров. Так как  $s = 2$ , то система два раза статически неопределенна.

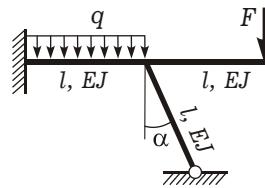
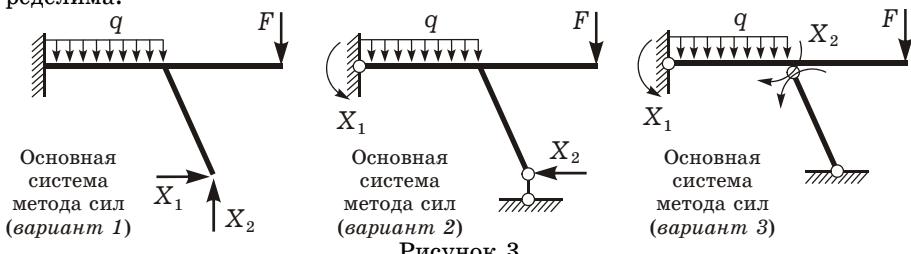


Рисунок 1



Рисунок 2

**Выбор основной системы.** Основная система метода сил – это статически определимая система, полученная из заданной путем отбрасывания лишних связей.

Для того чтобы основная и заданная системы были эквивалентными, к основной системе, кроме внешней нагрузки, прикладывают дополнительные усилия, представляющие собой реакции отброшенных связей.

Приведем три варианта основной системы (рисунок 3). Поясним каждый из них. *Вариант 1* предполагает отбрасывание шарнирно-неподвижной опоры. Получаем ломаный брус, заделанный левым концом, к которому дополнительно приложены две неизвестные сосредоточенные силы  $X_1$ ,  $X_2$ . В *варианте 2* жесткую заделку заменяем шарниром, а шарнирно-неподвижную опору – шарнирно-подвижной. При этом к системе прикладываем неизвестные момент  $X_1$  и силу  $X_2$ . *Вариант 3* получаем, заменив заделку шарниром и вводя простой шарнир в верхнее сечение наклонного элемента рамы. В качестве неизвестных прикладываем сосредоточенный момент  $X_1$ , а также два равных и противоположно направленных момента  $X_2$ . (Усилие  $X_2$  имеет смысл внутреннего изгибающего момента, т. е. при составлении уравнений равновесия всей системы его суммарный момент будет равен нулю).

Для расчета выбираем третий вариант основной системы, так как эпюры изгибающих моментов для него получатся наиболее простыми. Следовательно, при их перемножении количество подсчетов будет наименьшим.

Проводим кинематический анализ принятой основной системы. Число степеней свободы определяем по формуле:

$$W = III - 3K = 3 - 3 \cdot 1 = 0,$$

где  $III = 3$  – количество простых шарниров;

$K = 1$  – число замкнутых контуров.

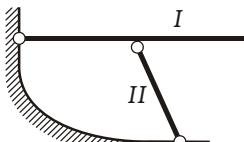


Рисунок 4

Необходимое условие геометрической неизменяемости ( $W \leq 0$ ) выполняется. Анализируем геометрическую структуру конструкции. Диски  $I$ ,  $II$  и земля соединены тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой. Следовательно, выбранная основная система метода сил геометрически неизменяема и, так как  $W = 0$ , статически определима.

**Система канонических уравнений.** Рама два раза статически неопределенна, следовательно, канонические уравнения представляют собой систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $X_1, X_2$  – неизвестные усилия (для выбранной основной системы – изгибающие моменты);  $\delta_{km}$  – перемещение по направлению усилия  $X_k$  от действия единичного усилия, приложенного по направлению  $X_m$ <sup>1)</sup>;  $\Delta_{kp}$  – перемещение по направлению усилия  $X_k$  от действия внешней нагрузки ( $k, m = 1, 2$ ).

Единичные перемещения  $\delta_{11}, \delta_{22}$  называются *главными*, они всегда положительны;  $\delta_{12}, \delta_{21}$  –  *побочные* единичные перемещения, в соответствии с теоремой Максвелла  $\delta_{12} = \delta_{21}$ .

#### Построение единичных и грузовой эпюр изгибающих моментов.

Эпюра  $M_1$ . К основной системе прикладываем только  $\bar{X}_1 = 1$  (единичное усилие по направлению  $X_1$ ) (рисунок 5, а). В опорных шарнирах  $A$  и  $B$  возникают четыре составляющие опорных реакций:  $H_A, V_A, H_B, V_B$ . Нет необходимости вычислять их все. Определим только те, которые нужны для расчета ординат эпюры  $M_1$ .

Мысленно рассечем раму по шарниру  $C$ . Составим уравнение равновесия моментов верхней части относительно точки  $C$ , из которого найдем  $V_A$ :

$$\sum M_C^{\text{лев}} = \bar{X}_1 - V_A l = 0; \quad V_A = \bar{X}_1 / l = 1/l.$$

Вычислим ординаты эпюры  $\bar{M}_1$  в характерных точках. При этом подсчитаем только абсолютные значения моментов и укажем, какие волокна они растягивают.

$$\bar{M}_1^{(A)} = \bar{X}_1 = 1 \text{ (растянуты верхние волокна);}$$

$$\bar{M}_1^{(D)} = V_A l - \bar{X}_1 = 1 - 1 = 0; \quad \bar{M}_1^{(B)} = \bar{M}_1^{(C)} = \bar{M}_1^{(K)} = 0.$$

<sup>1)</sup> Иными словами  $\delta_{km}$  – перемещение по направлению усилия  $X_k$ , вызванное усилием  $X_m = 1$ .

По полученным ординатам строим эпюру  $\bar{M}_1$  (см. рисунок 5, а). Следует заметить, что эпюра безразмерная, так как она построена от воздействия единичного изгибающего момента  $\bar{X}_1 = 1$ .

*Эпюра  $\bar{M}_2$ .* К основной системе прикладываем только момент  $\bar{X}_2 = 1$  (рисунок 5, б). Определим необходимые составляющие опорных реакций. Мысленно разрежем раму горизонтальным сечением по шарниру C и рассмотрим равновесие верхней части. В ней действует один из моментов  $\bar{X}_2 = 1$  (верхний). Составим уравнение равновесия моментов верхней части относительно точки C, из которого найдем  $V_A$ :

$$\sum M_C^{\text{верх}} = V_A l - \bar{X}_2 = 0; \quad V_A = \bar{X}_2 / l = 1/l.$$

Вычислим ординаты эпюры  $\bar{M}_2$  в характерных точках:

$$\bar{M}_2^{(A)} = \bar{M}_2^{(B)} = \bar{M}_2^{(K)} = 0; \quad \bar{M}_2^{(C)} = \bar{X}_2 = 1 \text{ (растянуты правые волокна);}$$

$$\bar{M}_2^{(D)} = V_A l = (1/l)l = 1 \text{ (растянуты верхние волокна).}$$

По полученным ординатам строим эпюру  $\bar{M}_2$  (см. рисунок 5, б). Она также безразмерная.

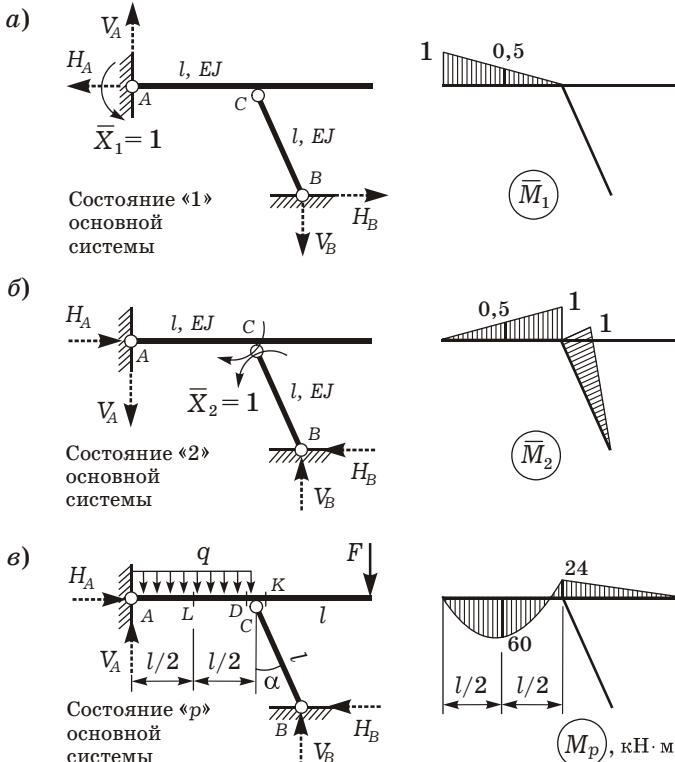


Рисунок 5

**Эпюра  $M_p$ .** К основной системе прикладываем только заданную внешнюю нагрузку (рисунок 5, в). Для расчета ординат эпюры  $M_p$  достаточно определить только  $V_A$ . Составим уравнение равновесия моментов верхней части относительно точки  $C$ , из которого найдем  $V_A$ :

$$\sum M_C^{\text{вепx}} = ql^2 / 2 - V_A l - Fl = 0; \quad V_A = ql / 2 - F = 36 \cdot 4 / 2 - 6 = 66 \text{ кН.}$$

Вычислим ординаты эпюры  $M_p$  в характерных точках.

$$\bar{M}_p^{(A)} = \bar{M}_p^{(C)} = \bar{M}_p^{(B)} = 0; \quad \bar{M}_p^{(K)} = Fl = 6 \cdot 4 = 24 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\bar{M}_p^{(D)} = ql^2 / 2 - V_A l = 36 \cdot 4^2 / 2 - 66 \cdot 4 = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим значение момента в точке  $L$  (посередине участка  $AC$ ):

$$\bar{M}_p^{(L)} = V_A l / 2 - ql^2 / 8 = 66 \cdot 4 / 2 - 36 \cdot 4^2 / 8 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Полученные ординаты отложим на эпюре  $M_p$  со стороны растянутых волокон (см. рисунок 5, в).

**Вычисление единичных и грузовых перемещений.** Для определения перемещений, являющихся коэффициентами канонических уравнений, применим метод Мора. При этом влиянием продольных и поперечных сил пренебрегаем и считаем, что перемещения обусловлены только действием изгибающих моментов. Используем следующие формулы:

$$\delta_{km} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_k \bar{M}_m}{EJ} dz; \quad \Delta_{kp} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_k M_p}{EJ} dz \quad (k, m = 1, 2).$$

Все стержни рамы прямолинейны, их жесткость постоянна. Для перемножения соответствующих эпюр воспользуемся способом Симпсона.

$$\delta_{11} = \frac{l}{6EJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{l}{3EJ}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l}{6EJ} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{l}{6EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{l}{6EJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{l}{6EJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2l}{3EJ};$$

$$\Delta_{1p} = \frac{l}{6EJ} (-4 \cdot 0,5 \cdot 60) = \frac{-20l}{EJ}; \quad \Delta_{2p} = \frac{l}{6EJ} (1 \cdot 24 - 4 \cdot 0,5 \cdot 60) = \frac{-16l}{EJ}.$$

Заметим, что если ординаты эпюр расположены по разные стороны от оси, то их произведение отрицательно.

**Проверка правильности вычисления перемещений.** Строим суммарную единичную эпюру  $M_S$ , складывая ординаты эпюр  $M_1$  и  $M_2$  (рисунок 6):  $M_S = M_1 + M_2$ . Находим условное суммарное единичное перемещение  $\delta_{ss}$ , умножая  $M_S$  саму на себя:

$$\delta_{ss} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_S^2}{EJ} dz = \frac{l}{6EJ} (2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \frac{l}{6EJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{4}{3EJ}.$$

С другой стороны,  $\delta_{ss}$  должно равняться сумме всех единичных перемещений

$$\delta_{ss} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{l}{3EJ} + 2 \cdot \frac{l}{6EJ} + \frac{2l}{3EJ} = \frac{4l}{3EJ}.$$

Результаты совпали, значит, единичные перемещения вычислены верно.

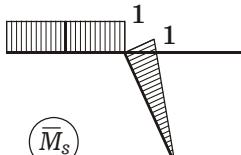


Рисунок 6

Найдем условное суммарное грузовое перемещение  $\Delta_{sp}$ , умножив эпюру  $\bar{M}_S$  на  $M_p$  (см. рисунок 5, в), а также просуммировав грузовые перемещения  $\Delta_{1p}$  и  $\Delta_{2p}$ :

$$\Delta_{sp} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_S M_p}{EJ} dz = \frac{l}{6EJ} (1 \cdot 24 - 4 \cdot 1 \cdot 60) = -\frac{36l}{EJ},$$

$$\Delta_{sp} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = -\frac{20l}{EJ} - \frac{16l}{EJ} = -\frac{36l}{EJ}.$$

Совпадение результатов говорит о правильности вычисления перемещений.

**Решение системы канонических уравнений.** Найденные значения единичных и грузовых перемещений подставляем в систему канонических уравнений (1):

$$\begin{cases} \frac{l}{3EJ} X_1 + \frac{l}{6EJ} X_2 - \frac{20l}{EJ} = 0; \\ \frac{l}{6EJ} X_1 + \frac{2l}{3EJ} X_2 - \frac{16l}{EJ} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Умножим оба уравнения (2) на  $6EJ/l$  и перенесем их свободные члены в правую часть. Получим:

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 = 120; \\ X_1 + 4X_2 = 96. \end{cases} \quad (3)$$

Решив систему (3), определим неизвестные моменты  $X_1$ ,  $X_2$ :

$$X_1 = 54,86 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad X_2 = 10,29 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Выполним проверку правильности вычисления  $X_1$ ,  $X_2$ , подставив их значения в систему (3):

$$2 \cdot 54,86 + 10,29 = 120; \quad 54,86 + 4 \cdot 10,29 = 96.$$

Проверка выполняется.

**Построение эпюры изгибающих моментов в заданной системе.** Вычислим ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов  $M$  по формуле:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_p.$$

Умножим ординаты  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$  на соответствующие значения  $X_1$ ,  $X_2$ . Сложим полученные эпюры с грузовой эпюрой (рисунок 7):

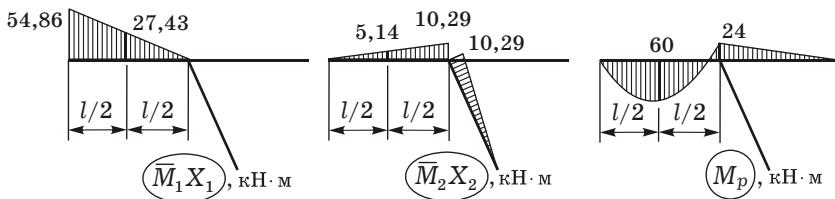


Рисунок 7

Подсчитаем значения изгибающих моментов в характерных точках заданной системы (рисунок 8, а).

По полученным ординатам строим эпюру (рисунок 8, б). Экстремальное значение момента на участке  $AC$  определим позже, после построения эпюр поперечных сил.

**Статическая проверка эпюры  $M$ .** Вырежем жесткий узел  $D-C-K$  (рисунок 9) и составим для него уравнение моментов

$$\sum M = 34,29 - 24 - 10,29 = 0 .$$

Узел находится в равновесии.

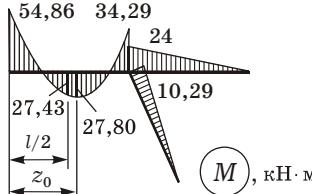
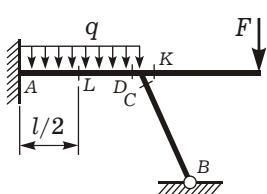


Рисунок 8

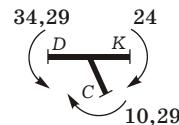


Рисунок 9

**Деформационная проверка эпюры  $M$ .** Для проверки выберем другую основную систему – вариант 1 (см. рисунок 3). Условное суммарное перемещение по направлениям неизвестных сил от совместного действия этих сил и внешней нагрузки должно равняться нулю:

$$\Delta_{sp}^* = \sum_l \int \frac{\bar{M}_s^* M}{EJ} dz = 0 .$$

Здесь  $\bar{M}_s^*$  – суммарная единичная эпюра изгибающих моментов для варианта 1 основной системы. Для ее построения нагружим раму одновременно двумя единичными усилиями  $\bar{X}_1^* = 1$ ,  $\bar{X}_2^* = 1$  (рисунок 10) и рассчитаем значения момента  $\bar{M}_s^*$  в характерных точках.

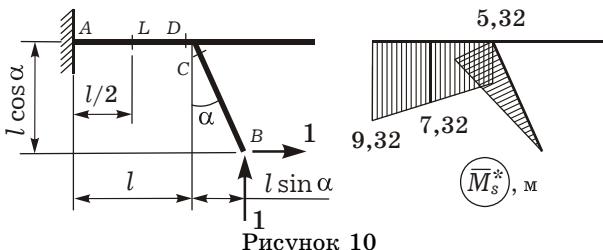


Рисунок 10

$$\bar{M}_s^{*(C)} = \bar{M}_s^{*(D)} = 1 \cdot l \cdot \sin \alpha + 1 \cdot l \cdot \cos \alpha = 4 \cdot 0,423 + 4 \cdot 0,906 = 5,32 \text{ м} ;$$

$$\bar{M}_s^{*(A)} = 1 \cdot (l + l \cdot \sin \alpha) + 1 \cdot l \cdot \cos \alpha = 4 + 4 \cdot 0,423 + 4 \cdot 0,906 = 9,32 \text{ м} ;$$

$$\bar{M}_s^{*(L)} = 1 \cdot (l/2 + l \cdot \sin \alpha) + 1 \cdot l \cdot \cos \alpha = 2 + 4 \cdot 0,423 + 4 \cdot 0,906 = 7,32 \text{ м}$$

(растянуты внутренние волокна).

Подсчитаем условное суммарное перемещение

$$\begin{aligned} \Delta_{sp}^* &= \frac{l}{6EJ} (-9,32 \cdot 54,86 - 5,32 \cdot 34,29 + 4 \cdot 7,32 \cdot 27,43) + \frac{l}{6EJ} (-2 \cdot 5,32 \cdot 10,29) = \\ &= \frac{0,0532\vartheta}{6EJ} = \frac{0,0532 \cdot 4}{6 \cdot 10^7} \approx 0 . \end{aligned}$$

Равенство нулю величины  $\Delta_{sp}^*$  свидетельствует о том, что вертикальное и горизонтальное перемещения правого опорного сечения рамы по направлениям приложенных единичных сил отсутствуют. Это соответствует данной схеме конструкции. Значит, эпюра моментов построена верно.

**Построение эпюры поперечных сил.** Эпюра поперечных сил  $Q$  строится по готовой эпюре изгибающих моментов  $M$ .

На участке  $AC$ , где эпюра  $M$  ограничена параболой, т. е. действует равномерно распределенная нагрузка, поперечную силу определяем с помощью балочной аналогии. Вырежем этот участок (рисунок 11, а). Приложим к сечениям  $A$ ,  $C$  известные моменты и пока неизвестные поперечные силы.

Моменты направляем так, как следует из эпюр изгибающих моментов  $M$  (см. рисунок 8, б): эпюра построена на растянутых волокнах, значит, в сечениях  $A$  и  $D$  растянуты верхние волокна. Поперечные силы считаем положительными, т. е. они врашают рассматриваемый участок по часовой стрелке (см. рисунок 11, а).

Составим уравнения равновесия:

$$\sum M_D = ql^2/2 - Q_A l + 54,86 - 34,29 = 0 ;$$

$$\sum M_A = -ql^2/2 - Q_D l + 54,86 - 34,29 = 0 ;$$

из них

$$Q_A = ql/2 + (54,86 - 34,29)/l = 36 \cdot 4 / 2 + 20,57 / 4 = 77,14 \text{ кН} ;$$

$$Q_D = -ql/2 + (54,86 - 34,29)/l = -36 \cdot 4 / 2 + 20,57 / 4 = -66,86 \text{ кН} .$$

Для проверки составим уравнение проекций сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = Q_A - Q_D - ql = 77,14 - (-66,86) - 36 \cdot 4 = 0 .$$

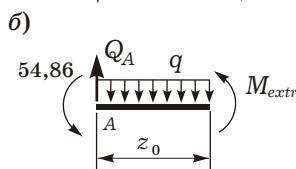
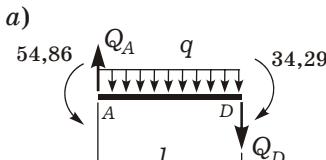


Рисунок 11

Полученные значения  $Q_A$ ,  $Q_D$  откладываем на эпюре  $Q$  и соединяем прямой линией (рисунок 12).

Проведем сечение на расстоянии  $z_0$  от начала участка (рисунок 11, б). Поперечная сила в нем равна нулю, а изгибающий момент экстремален ( $M_{extr}$ ). Составим уравнение проекций на вертикальную ось:

$$Q_A - qz_0 = 0 ;$$

отсюда

$$z_0 = Q_A / q = 77,14 / 36 = 2,14 \text{ м} .$$

### Экстремальный изгибающий момент

$$M_{extr} = -54,86 + Q_A z_0 - qz_0^2 / 2 =$$

$$= -54,86 + 77,14 \cdot 2,14 - 36 \cdot 2,14^2 / 2 = 27,80 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

Отмечаем полученное значение на эпюре моментов (см. рисунок 8, б).

Для вычисления значений поперечных сил на участках рамы, где эпюра  $M$  прямолинейна, используем дифференциальную зависимость  $Q = dM / dz$ . Поперечная сила, как первая производная от изгибающего момента, равна тангенсу угла наклона эпюры моментов.

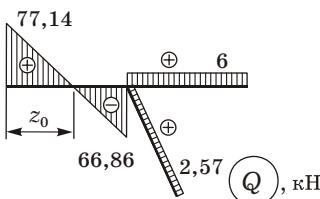


Рисунок 12

**Правило знаков:** сила  $Q$  считается положительной, если для совмещения оси стержня с эпюрои  $M$  ось вращают по часовой стрелке.

На участке  $CB$  получим

$$Q_{CB} = 10,29 / l = 10,29 / 4 = 2,57 \text{ кН};$$

в точке  $K$  и на всей консоли

$$Q_K = 24 / h = 24 / 4 = 6 \text{ кН}.$$

Силы  $Q_{CB}$  и  $Q_K$  положительны, так как для совмещения осей этих участков с эпюрои  $M$  необходимо произвести вращение по часовой стрелке.

По рассчитанным ординатам строим эпюру поперечных сил (рисунок 12).

**Построение эпюры продольных сил.** Эпюру продольных сил  $N$  строим по готовой эпюре  $Q$ . Отсечем консоль и рассмотрим ее равновесие (рисунок 13). Очевидно, что в точке  $K$  и на всей консоли  $N_K = 0$ .

Отсечем часть рамы с консолью в точках  $D$  и  $C$ . В сечениях приложим поперечные и продольные силы (см. рисунок 13). Положительные поперечные силы направим так, чтобы они вращали узлы по часовой стрелке, отрицательные – против часовой стрелки (см. рисунок 12). Все продольные силы  $N$  считаем положительными – растягивающими.

Составим уравнения равновесия в виде сумм проекций всех сил на вертикальную и горизонтальную оси, из которых найдем продольные силы.

$$\sum Y = -66,86 - 2,57 \sin \alpha - F - N_{BC} \cos \alpha = 0;$$

$$N_{BC} = (-66,86 - 2,57 \sin \alpha - F) / \cos \alpha = \\ = (-66,86 - 2,57 \cdot 0,423 - 6) / 0,906 = -81,59 \text{ кН};$$

$$\sum Z = -2,57 \cos \alpha - N_{AD} + N_{BC} \sin \alpha = 0;$$

$$N_{AD} = N_{BC} \sin \alpha - 2,57 \cos \alpha =$$

$$= -81,59 \cdot 0,423 - 2,57 \cdot 0,906 = -36,81 \text{ кН}.$$

Знак «минус» указывает на то, что стержни  $BC$  и  $AD$  сжаты. По полученным данным строим эпюру  $N$  (рисунок 14).

**Статическая проверка равновесия рамы.** Отсечем раму от опор в точках  $A$  и  $B$  (рисунок 15) и приложим в них внутренние усилия, взятые из эпюр  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ . При этом силы  $Q$  и  $N$  прикладываем с их реальными направлениями, т. е. с учетом знака. Составим уравнения равновесия рамы.

Сумма проекций всех сил на горизонтальную и вертикальную оси

$$\sum Z = 54,86 - 2,57 \cdot \cos \alpha - 81,59 \cdot \sin \alpha = \\ = 54,86 - 2,57 \cdot 0,906 - 81,59 \cdot 0,423 = 0;$$

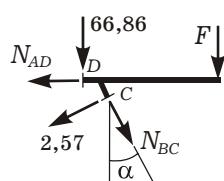


Рисунок 13

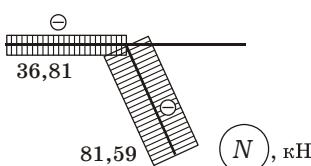


Рисунок 14

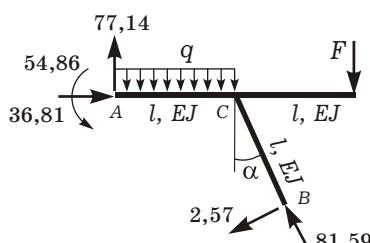


Рисунок 15

$$\begin{aligned}\sum Y &= -F - ql + 77,14 + 81,59 \cdot \cos \alpha - 2,57 \cdot \sin \alpha = \\ &= -6 - 36 \cdot 4 + 77,14 + 81,59 \cdot 0,906 - 2,57 \cdot 0,423 = 0.\end{aligned}$$

Подсчитаем сумму моментов всех сил относительно точки С. При выборе точки стараемся, чтобы в уравнение вошло как можно больше сил и моментов.

$$\begin{aligned}\sum M_C &= 54,86 - 77,14 \cdot l + ql^2 / 2 - Fl - 2,57 \cdot l = \\ &= 54,86 - 77,14 \cdot 4 + 36 \cdot 4^2 / 2 - 6 \cdot 4 - 2,57 \cdot 4 = 0.\end{aligned}$$

Рама находится в равновесии, следовательно, эпюры построены верно.

**Вычисление перемещений.** Используем метод Мора. Будем рассматривать два состояния системы: грузовое – действие заданной внешней нагрузки, и единичное – действие единичного усилия в направлении искомого перемещения.

Вычисление перемещений можно значительно упростить, если вычислять их не в заданной статически неопределенной системе, а в статически определимой основной. Может быть выбрана любая основная система, а не только та, которая использовалась для построения эпюры  $M$ . Будем использовать ее первый вариант (см. рисунок 3).

Можно считать, что к основной системе, кроме заданной нагрузки, приложены дополнительные внешние усилия  $X_1, X_2$ . От этого воздействия построена эпюра изгибающих моментов  $M$  (см. рисунок 8). Осталось исследовать единичные состояния, соответствующие искомым перемещениям.

**Определение угла поворота жесткого узла рамы.** По направлению искомого угла поворота к выбранной основной системе прикладываем единичный изгибающий момент  $\bar{m} = 1$  (рисунок 16) и строим эпюру  $\bar{M}$ .

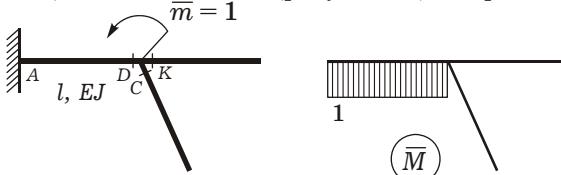


Рисунок 16

Угловое перемещение узла С рамы  $\Delta_{Cp}$ , получим, перемножив эпюры  $M$  и  $\bar{M}$ :

$$\begin{aligned}\Delta_{Cp} &= \int_l \frac{M\bar{M}}{EJ} dz = \frac{l}{6EJ} (-54,86 \cdot 1 - 34,29 \cdot 1 + 4 \cdot 27,43 \cdot 1) = \\ &= 3,43 (\text{kH} \cdot \text{м}) \frac{l}{EJ} = \frac{3,43 \cdot 10^3 \cdot 4}{10^7} = 1,37 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}\end{aligned}$$

Полученный угол поворота узла рамы положителен, следовательно, его направление совпадает с направлением момента  $\bar{m} = 1$ .

**Определение вертикального перемещения заданной точки.** По направлению искомого прогиба в точке Н к основной системе прикладываем единичную сосредоточенную силу  $\bar{F} = 1$  (рисунок 17) и строим единичную эпюру  $\bar{M}$ . Линейное перемещение точки Н рамы  $\Delta_{Hp}$  получим, перемножив эпюры  $M$  и  $\bar{M}$ :

$$\Delta_{H_p} = \int_l \frac{\bar{M}\bar{M}}{EJ} dz = \frac{l}{6EJ} (54,86 \cdot 2l + 34,29 \cdot l - 4 \cdot 27,43 \cdot 1,5l) + \frac{l}{6EJ} 2 \cdot 24 \cdot l = \\ = 4,57 \text{ (кН} \cdot \text{м}) \frac{l^2}{EJ} = \frac{4,57 \cdot 10^3 \cdot 4^2}{10^7} = 7,31 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

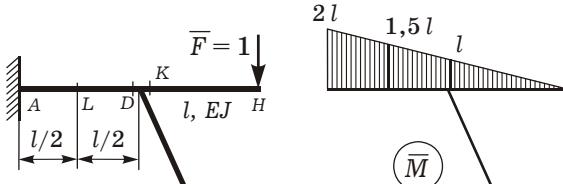


Рисунок 17

Полученный прогиб положителен, следовательно, его направление совпадает с направлением приложенной единичной силы.

Характер деформирования стержней рамы под действием нагрузки показан на рисунке 18.

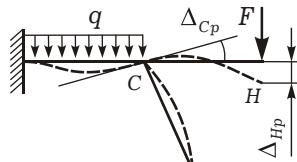


Рисунок 18

Здесь учтены направления перемещений и то, что эпюра изгибающих моментов построена на растянутых волокнах (см. рисунок 8).